величина P меняется следующим образом:

$$P = \xi^a \eta^b \zeta^c P'. \qquad (1.6)$$

Величина

$$\Pi = \frac{P}{X^a Y^b Z^c} \qquad (1.7)$$

по определению есть так называемая

безразмерная комбинация

величин P, X, Y, Z. Показатели при L, M, T для нее равны нулю. Она сохраняет свое численное значение при изменении масштабов.

Взятие любой элементарной (sin, exp, ln, arctg и т. д.) или иной не полиномиальной функции возможно лишь от безразмерных величин (например, углов в радианной мере) или от безразмерных комбинаций размерных величин.

П-*теорема.* **Пусть имеется зависимость вида**

$$P_0 = f(X, Y, Z, P_1, \ldots, P_S),$$

в которой величины X, Y, Z положительны и размерно независимы. Тогда существует эквивалентная зависимость

$$\Pi_0 = \varphi(\Pi_1, \ldots, \Pi_S),$$

в которой Π_i — безразмерные комбинации вида (7).

Доказательство. После изменения масштабов (5) в силу (6)

$$\xi^{a_0}\eta^{b_0}\zeta^{c_0} P_0 = f(\xi X, \eta Y, \zeta Z, \xi^{a_1}\eta^{b_1}\zeta^{c_1} P_1, \ldots, \xi^{a_S}\eta^{b_S}\zeta^{c_S} P_S)$$

(штрихи при P_i, X, Y, Z мы убрали). Каковы бы ни были значения X, Y, Z, всегда можно так изменить масштабы, что

$$\xi = \frac{1}{X}, \quad \eta = \frac{1}{Y}, \quad \zeta = \frac{1}{Z}.$$

Всякий раз получим

$$\frac{P_0}{X^{a_0} Y^{b_0} Z^{c_0}} = f\left(1, 1, 1, \frac{P_1}{X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1}}, \ldots, \frac{P_S}{X^{a_S} Y^{b_S} Z^{c_S}}\right), \qquad (1.8)$$

что и требовалось.

Сила П-теоремы (равно как и слабость) в том, что не играет никакой роли источник зависимости f.

Пример. Пусть шар радиуса R движется со скоростью v в газе плотностью ρ. Допустим, что сила сопротивления $F = f(\rho, v, R)$. Анализируя размерности

$$[R] = \mathrm{L}, \ [\rho] = \mathrm{M/L^3}, \ [v] = \mathrm{L/T}, \ [F] = \mathrm{ML/T^2},$$

видим, что первые три независимы и что $[F] = [\rho][R]^2[v]^2$. В силу П-теоремы $F/\rho R^2 v^2 = f(1, 1, 1) = C$. Хотя значение C установить мы не можем, ясно, что

$$F = C\rho R^2 v^2,$$