ДВИЖЕНИЕ В СРЕДЕ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} \Rightarrow x = x_0 - \frac{m}{c}\dot{x}_0 e^{-\frac{c}{m}t}.$$

Точка либо покоится, либо стремится к покою при $t \to \infty$.

ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ:

$$m\ddot{z} = -mg - c\dot{z}.$$

Сейчас самое время проиллюстрировать применение метода безразмерных комбинаций. Параметры задачи имеют размерности

$$[m] = \mathrm{M},\ [g] = \mathrm{L/T^2},\ [c] = \mathrm{M/T},$$

которые, конечно, независимы. Положим $m = g = c = 1$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\dot{z} = -1 - \dot{z},$$

$$\dot{z} = -1 + \dot{z}_0 e^{-t},$$

$$z = z_0 - t - \dot{z}_0 e^{-t}.$$

Вместо t, $z(z_0)$, $\dot{z}_0$ подставим безразмерные комбинации

$$\frac{ct}{m},\quad \frac{zc^2}{gm^2},\quad \frac{\dot{z}_0 m}{gc}.$$

Получим общее решение

$$z = z_0 - \frac{mg}{c}t - \frac{m}{c}\dot{z}_0 e^{-\frac{c}{m}t}.$$

Движение всегда стремится к равномерному падению со скоростью mg/c (можно предложить в качестве упражнения доказать это, не решая уравнения движения).

ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГОЙ СИЛЫ (ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР):

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Получаются гармонические колебания (осцилляции):

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Здесь частота ω, период колебаний T, амплитуда A и начальная фаза φ даются формулами:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad T = \frac{2\pi}{\omega};$$