мятся к вынужденному колебанию

$$x = \frac{\Phi}{m\sqrt{(\omega^2-\nu^2)^2+4\chi^2\nu^2}}\cos\left(\nu t + \operatorname{arctg}\frac{2\chi\nu}{(\omega^2-\nu^2)}\right).$$

ДВИЖЕНИЕ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ:

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_y \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0 t \\ y = y_0 + \dot{y}_0 t - gt^2/2 \end{cases}$$

При $\dot{x}_0 \neq 0$ траектории будут параболами.

ПЛОСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР:

в векторном виде сила имеет вид

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} = -k(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y).$$

Поэтому уравнения движения суть

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \end{cases}$$

Как и в предыдущей задаче, в этой имеет место

разделение переменных,

т. е. получаются независимые уравнения, задающие изменение каждой из координат со временем. Общее решение

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t,$$

$$y = y_0\cos\omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t$$

можно представить в специфическом для этой задачи виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & \dot{x}_0 \\ y_0 & \dot{y}_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \frac{1}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix}.$$

Если в этой формуле определитель матрицы отличен от нуля — начальная скорость неколлинеарна начальному радиусу-вектору, то, применив обратную матрицу (это не обязательно делать в явном виде), увидим, что $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ суть линейные функции x и y с коэффициентами, зависящими от начальных условий. Следовательно, тождество $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t \equiv 1$ даст нам уравнение траектории, которая получится эллипсом (сумма квадратов линейных форм есть положительно определенная квадратичная форма). Легко понять, что центр этого эллипса находится в начале координат.

ПЛОСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

По сравнению с предыдущей задачей добавляется сила

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -c\mathbf{v} = -c(\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y),$$