так что в уравнениях движения переменные снова разделяются. Задача свелась к соответствующей одномерной.

Здесь, однако, уместно сделать качественный комментарий: мы видим, что если на колебательное движение наложить вязкое трение, то вместо ограниченных колебаний будем иметь асимптотическое стремление к нулю всех решений. Другими словами, устойчивая линейная система превращается в асиптотически устойчивую. Заметим (но это выходит за рамки настоящих лекций), что сделанное частное наблюдение может быть расширено до одной общей теоремы из теории устойчивости.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

такое же, как движение массы в однородном поле тяжести.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Мы хотим показать силу, которая, как и вязкое трение, зависит только от скорости, но зависит совершенно иначе. Это — сила Лоренца. Представим ее в примитивном виде:

$$\mathbf{F}=[\mathbf{v}\times\mathbf{C}],$$

где $\mathbf{C}$ — некоторый постоянный вектор, так что сила перпендикулярна скорости. Отсюда вытекает, что движение происходит со скоростью $\mathbf{v}$, неизменной по модулю: $|\mathbf{v}|=\text{const}$. В самом деле, кинетическая энергия точки $m\mathbf{v}^2/2$ постоянна:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}^2}{2}=\left(m\frac{d\mathbf{v}}{dt},\ \mathbf{v}\right)=([\mathbf{v}\times\mathbf{C}],\mathbf{v})\equiv 0,$$

что и требовалось. Скорость сохраняет абсолютную величину, но все время меняет направление. Выпишем уравнения движения, считая без уменьшения общности, что $\mathbf{C}=C\mathbf{e}_y$:

$$\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \dot{x} & 0\\ \mathbf{e}_y & \dot{y} & C\\ \mathbf{e}_z & \dot{z} & 0\end{vmatrix}=C\dot{x}\mathbf{e}_z-C\dot{z}\mathbf{e}_x\Rightarrow\begin{cases}m\ddot{x}=-C\dot{z}\\ m\ddot{y}=0\\ m\ddot{z}=C\dot{x}\end{cases}$$

Видим, что переменная y отделилась, и y меняется равномерно. В частности, возможно $\dot{y}=0$, $y=\text{const}$. Поэтому дальнейшее исследование достаточно провести для движений в плоскости Oxz, происходящих независимо. Система первых двух уравнений:

$$\frac{d\dot{x}}{dt}=-\frac{C}{m}\dot{z},\qquad\frac{d\dot{z}}{dt}=+\frac{C}{m}\dot{x}$$

эквивалентна уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\dot{x}}{dt}=-\frac{C^2}{m^2}\dot{x},$$