функции вида $U(r)$. Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U' \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} U',$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U'}{r} - \frac{U'}{r^2}\frac{x^2}{r} + U'' \frac{x^2}{r^2},$$

и аналогично для y, z. Отсюда

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} V = 2U'/r + U'' \equiv 0,$$

что влечет

$$\frac{d}{dr}U' = -\frac{2}{r}U', \quad U' = \frac{C}{r^2}, \quad U = -\frac{C}{r} + \tilde{c},$$

причем $\tilde{c}=0$ в силу условия на бесконечности. Итак,

$$V = -\frac{fMm}{R}\frac{CR}{r} = -C\frac{fMm}{r}.$$

При $R \to 0$ этот потенциал (который от R не зависит) должен давать нам потенциал точки. Поэтому $C=1$, что и завершает рассуждения.

На практике потенциалы раскладывают в ряды по степеням $1/r$. А именно в сферических координатах r, θ, φ:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \tag{3.4}$$

в области $r>R$, где нет ни одной точки тела, пользуются разложениями вида:

$$V = -\frac{fMm}{r}\sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{R}{r}\right)^n W_n(\theta, \varphi) \tag{3.5}$$

(величины I_n — некоторые безразмерные постоянные). В частности, можно доказать, что для любого осесимметричного тела (пусть ось Oz — это ось симметрии; тогда W_n не зависит от φ)

$$V(r) = -\frac{fMm}{r}\left(1 + I_1\frac{R}{r}\cos\theta + I_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right) + O\left(\frac{R}{r}\right)^3. \tag{3.6}$$

С этой точки зрения нас заинтересует теперь

ЗАДАЧА ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ.

В ней гравитационное поле создается двумя точечными массами:

$$M_1 = \frac{1}{2}(M+\mu), \quad M_2 = \frac{1}{2}(M-\mu).$$

Не уменьшая общности, их можно поместить на ось Oz в точки $(0, 0, \pm a)$. Используя угол θ между вектором $\mathbf{r}$ и этой осью, напишем

$$V(\mathbf{r}) = -fm\left[\frac{M+\mu}{2\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}} + \frac{M-\mu}{2\sqrt{r^2+2ar\cos\theta+a^2}}\right]. \tag{3.7}$$