Это может быть Земля, корабль, вагон, спутник. Системы отсчета многочисленны: отсюда задача уяснить, насколько отличается описание движения с точки зрения разных систем. Уяснить — значит разработать удобную систему понятий, сопряженную с экспериментом и измерениями.

Пусть имеется некоторая система отсчета, которую условимся называть неподвижной. Множество точек P_i образует

ТВЕРДОЕ ТЕЛО,

если рассматриваются только такие непрерывные перемещения $P_i(t)$ этого множества, при которых расстояния между точками не изменяются: $|\overline{P_i(t_1)P_j(t_1)}|=|\overline{P_i(t_2)P_j(t_2)}|$ для любых t_1, t_2. Легко доказать, что всякое конечное перемещение твердого тела (т. е. переход от $P_i(t_1)$ к $P_i(t_2)$) можно представить как результат его параллельного переноса и поворота вокруг произвольно отмеченной в теле точки: фактически речь идет об описании изометрий трехмерного евклидова пространства, сохраняющих ориентацию. Впредь условимся считать, что тело невырожденно, подразумевая под этим, что все его точки не расположены на одной-единственной прямой: тогда при каждой нетождественной изометрии хотя бы одна из точек тела будет изменять свое положение.

Начнем с изучения изометрий частного вида — поворотов, при которых отмеченная точка O остается неподвижной.

Любой поворот вокруг точки O имеет инвариантную прямую с направляющим единичным вектором $\mathbf{i}$ (все точки этой прямой остаются неподвижными). Поворот можно представить как результат вращения тела вокруг вектора $\mathbf{i}$ на некоторый угол $\chi \bmod 2\pi$, который определен с точностью до $2\pi n$ и отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть вдоль прямой навстречу $\mathbf{i}$. Произвольная точка P с радиусом-вектором $\mathbf{r}=\overline{OP}$ после поворота перейдет в новую точку P' с радиусом-вектором $\mathbf{r}'=\overline{OP'}$. Положим

$$\mathbf{r}=(\mathbf{r},\ \mathbf{i})\mathbf{i}+\mathbf{p},$$

где вектор $\mathbf{p}$ перпендикулярен прямой (рис. 8):

$$\mathbf{p}=-[\mathbf{i}\times[\mathbf{i}\times r]].$$

Тогда

$$PP'=\mathbf{p}'-\mathbf{p}=\mathbf{p}\cos\chi+[\mathbf{i}\times\mathbf{p}]\sin\chi-\mathbf{p},$$

откуда, наконец, получается

формула конечного поворота

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\sin\chi[\mathbf{i}\times\mathbf{r}]+(1-\cos\chi)[\mathbf{i}\times[\mathbf{i}\times\mathbf{r}]]. \tag{4.1}$$

Из нее вытекает, что

$$\sin\chi=\frac{(\mathbf{r}'-\mathbf{r},\ [\mathbf{i}\times\mathbf{r}])}{|[\mathbf{i}\times\mathbf{r}]|^2},\quad 1-\cos\chi=\frac{(\mathbf{r}'-r,\ [\mathbf{i}\times[\mathbf{i}\times\mathbf{r}]])}{|[\mathbf{i}\times\mathbf{r}]|^2}. \tag{4.2}$$