Теперь рассмотрим не отдельный поворот, а вращение — процесс, в ходе которого все точки тела совершают гладкое движение (элементы матрицы поворота в репере $\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ — гладкие функции времени). Пусть из положения в мгновение t в положение в мгновение $t+\tau$ тело можно перевести поворотом вокруг вектора $\mathbf{i}_t(\tau)$ на угол $\chi_t(\tau)$. При $\tau=0$ этот поворот является тождественным.

Из формул (2) вытекает, что при $\tau\to 0$ стремится к нулю сам угол $\chi(\tau)$. Поэтому (1) приобретает вид

$$\mathbf{r}(t+\tau)-\mathbf{r}(t)=\chi[\mathbf{i}\times\mathbf{r}(t)]+O(\chi^2). \qquad (4.3)$$

Более того, из (2) следует, что $|\chi(\tau)|\leqslant C|\tau|$, так как вектор $[\mathbf{i}\times\mathbf{r}]$ ограничен по модулю и не обращается в нуль. Разделив (3) на τ и устремляя τ к нулю, получаем $O(\chi^2)=O(\tau^2)$, так что

$$\mathbf{v}_P=[\boldsymbol{\omega}\times\overline{OP}], \qquad (4.4)$$

где

$$\boldsymbol{\omega}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\chi(\tau)\,\mathbf{i}(\tau)}{\tau}. \qquad (4.5)$$

Предел существует (так как предел имеет левая часть (3), причем $\mathbf{v}_P$ заведомо линейно зависит от $\mathbf{r}$) и представляет собой **вектор угловой скорости** рассматриваемого твердого тела в мгновение t. Происхождение термина объясняется следующим частным случаем: пусть тело поворачивается вокруг неподвижной оси $\mathbf{i}=\mathrm{const}$ на угол $\varphi(t)$; тогда

$$\chi(\tau)=\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\Rightarrow\boldsymbol{\omega}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi(t+\tau)-\varphi(t)}{\tau}\,\mathbf{i}.$$

Короче говоря,

$$\mathbf{i}=\mathrm{const}\Rightarrow\boldsymbol{\omega}=\frac{d\varphi}{dt}\,\mathbf{i}. \qquad (4.6)$$

Еще раз подчеркнем: это частный случай, а не общее определение. Здесь в выражении $\boldsymbol{\omega}$ участвует скорость изменения угла φ, т. е. угловая скорость в буквальном смысле термина.

В случае произвольного движения твердого тела мы можем как угодно отметить в нем точку и в каждое мгновение параллельным переносом мысленно смещать тело так, чтобы эта точка оказалась в начале координат. Угловой скоростью движущегося тела назовем угловую скорость получающегося мысленного вращения; от выбора отмечаемой точки результат не зависит.

Введем новое понятие:

ПОДВИЖНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА.

Формально это всякая система отсчета, отличающаяся от той, которую мы облюбовали и назвали неподвижной. На деле это понятие богаче. Начнем с того, что подвижную систему координат ξ, η, ζ можно трактовать как твердое тело, состоящее из некоторой движущейся (относительно неподвижной системы отсчета) точки A и приложенных к ней векторов $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$, которые все