## Тема 5

## СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ С ТРЕНИЕМ

Рассмотрим класс модельных задач, описывающих движение одной материальной точки. Уравнения Ньютона имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m\ddot{y} &= Y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m\ddot{z} &= Z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Мы не ставим задачу решить эти уравнения, так как в общем случае это невозможно. Поэтому наметим более расплывчатую, но зато более реальную и вместе с тем достойную цель: искать качественные заключения о движении.

Например, полезно узнать, действует в данной задаче закон сохранения энергии или нет. С точки зрения физики это означает проверку того, сохраняется ли в задаче механическая форма энергии, ибо в узких рамках классической механики выражения типа «энергия превращается в тепло» не имеют смысла. Поэтому нам предпочтительнее говорить не «закон сохранения» (раз уж это не совсем закон), а «**первый интеграл** уравнений движения». В общем виде это функция $\Phi(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)$ такая, что если $(x(t), y(t), z(t))$ есть произвольное решение уравнений (1), то сложная функция времени

$$\Phi(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), x(t), y(t), z(t), t)$$

всякий раз постоянна (но получающаяся константа, конечно, может быть разной для разных движений). В частности,

### ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

$$H = \frac{mv^2}{2} + V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z). \tag{5.2}$$

Он имеет вполне определенную аналитическую структуру. Первое слагаемое $T = mv^2/2$ зависит только от скорости и называется кинетической энергией, второй зависит только от положения (и не зависит от времени) и называется потенциальной энергией. Подставим в $H$ произвольное решение уравнений (1) и полученную сложную функцию продифференцируем по времени:

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}_{\frac{dT}{dt}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z}}_{\frac{dV}{dt}}.$$

Заменяя $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$ их выражениями из уравнений (1), получим

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}}_{(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{r}})} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z}}_{-(\operatorname{grad} V, \dot{\mathbf{r}})} =$$