$$= \left(X + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\dot{x} + \left(Y + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\dot{y} + \left(Z + \frac{\partial V}{\partial z}\right)\dot{z}.$$

Отсюда следует

Теорема. А. **Вдоль движения всегда**

$$\frac{dT}{dt} = (\mathbf{F}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Б. Если дано консервативное поле сил, т. е. если

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V, \qquad V = V(x, y, z),$$

то имеет место интеграл энергии.

Условие Б достаточно, но отнюдь не необходимо (скоро мы это обсудим). Консервативное поле потенциально (см. тему 4), и при этом потенциал не зависит от времени.

Примеры консервативных сил:

1) сила тяжести: $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z \Rightarrow V = mgz$;

2) сила упругости:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -kx \\ -ky \\ -kz \end{pmatrix} \Rightarrow V = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{kr^2}{2};$$

3) сила гравитации:

$$\mathbf{F} = -\frac{fMm}{r^3}\mathbf{r} \Rightarrow V = -\frac{fMm}{r}.$$

Возможны случаи, когда интеграл энергии заведомо не может существовать. Например, если к силе, зависящей только от положения, добавляется сила вязкого трения $-c\mathbf{v}$. Тогда в выражении dH/dt появится слагаемое вида $-cv^2$, которое квадратично зависит от скорости и не может быть компенсировано другими слагаемыми, которые от скорости зависят линейно.

Для существования интеграла энергии вполне достаточно, чтобы было $(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv -\dot{V}$. Назовем силу $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)$ аэргической (греч. «эргос» — работа), если

$$(\mathbf{f}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv 0.$$

Ясно, что прибавление ее к силе $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V$ не нарушит наличия интеграла энергии, хотя движения станут другими. Например, магнитная составляющая силы Лоренца $\mathbf{F} = (q/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ является аэргической силой, так как $([\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \mathbf{v}) \equiv 0$. Мы уже столкнулись с этим при исследовании движений в однородном магнитном поле: интеграл энергии сводится к $mv^2/2 = \text{const}$, как и для движения в отсутствие всяких сил.

Иного рода пример аэргической силы доставит нам

ДВИЖЕНИЕ ПО НЕПОДВИЖНОЙ НЕШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ.

Допустим, что уравнение

$$f(x, y, z) = 0$$