Точка движется по вертикальной прямой под действием силы тяжести и силы сопротивления, которая направлена противоположно скорости и пропорциональна ее квадрату. Тогда

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda\dot{z}|\dot{z}| \tag{5.11}$$

(ось z направлена вверх). Параметры задачи положительны, и

$$[m] = \mathrm{M}, \quad [g] = \mathrm{L/T^2}, \quad [\lambda] = \mathrm{M/L}.$$

Видим, что m, g, λ размерно независимы; в процессе решения уравнения движения их можно будет приравнять к единице.

1. Найти $v(t)$, если $v(0) = 0$ (падение). Положим $m = g = \lambda = 1$. При $v = \dot{z} < 0$ из (11)

$$\frac{dv}{dt} = -1 + v^2, \quad \frac{dv}{1 - v^2} = -dt, \tag{5.12}$$

откуда в силу $v(0) = 0$ получаем

$$\ln\frac{1+v}{1-v} = -2t, \quad v = \frac{e^{-2t} - 1}{e^{-2t} + 1} = \operatorname{th} t.$$

Поскольку

$$[v] = \left[\sqrt{\frac{mg}{\lambda}}\right], \quad [t] = \left[\sqrt{\frac{m}{g\lambda}}\right],$$

общий результат

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{\lambda}}\operatorname{th}\sqrt{\frac{\lambda g}{m}}\,t.$$

2. Пусть точка брошена вверх со скоростью v_0. На какую максимальную высоту h она поднимается?

Будем искать зависимость $v = v_*(z)$. Имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dz}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Полагаем $m = g = \lambda = 1$ и $v \geqslant 0$. Из (11)

$$\frac{d}{dz}\frac{v^2}{2} = -1 - v^2, \quad \frac{d(v^2)}{1 + v^2} = -2, \tag{5.13}$$

откуда после интегрирования

$$\frac{1}{2}\ln(1 + v^2) = -z + C.$$

При $z = 0$ получаем $2C = \ln(1 + v_0^2)$, а при $z = C$ имеем $v = 0$. Следовательно, C и есть h. Поскольку

$$[h] = \left[\frac{m}{\lambda}\right], \quad [v_0] = [\sqrt{mg/\lambda}],$$

в общем случае

$$h = \frac{m}{2\lambda}\ln\left(1 + \frac{\lambda v_0^2}{mg}\right). \tag{5.14}$$