$$F=F(s).$$

При этом

$$V(s)=-\int F(s)\,ds.$$

Доказательство. Пусть $s(t)$ — движение. Вычислим

$$\frac{d}{dt}H\left(\frac{ds}{dt},\ s(t)\right)=\frac{d}{dt}\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d}{dt}V(s(t))=$$

$$=m\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+V'(s(t))\frac{ds}{dt}=\left[F\left(\frac{ds}{dt},\ s(t),\ t\right)+V'(s(t))\right]\frac{ds}{dt}.$$

Тождественный нуль получим тогда и только тогда, когда

$$[F(\dot s,\ s,\ t)+V'(s)]\dot s\equiv 0.$$

При $\dot s\neq 0$ это значит, что

$$F(\dot s,\ s,\ t)=-V'(s),$$

а при $\dot s=0$ по непрерывности верно то же самое. Полученное выражение для F и доказывает теорему.

Потенциальная энергия V определена с точностью до постоянной. То, что $F=F(s)$, имеет такие следствия: решения уравнения Ньютона допускают

А) сдвиг по времени: если $s(t)$ — движение, то и $s(t+\tau)$ тоже движение (свойство автономности);

Б) инверсию времени: если $s(t)$ — движение, то и $s(-t)$ тоже движение.

Для каждого движения $s(t)$ имеем $H(\dot s(t),\ s(t))=h$, где константа h определяется по начальным условиям или задается из каких-либо других соображений. Поскольку $m\dot s^2/2\geqslant 0$, при движении всегда выполняется неравенство $V(s(t))\leqslant h$.

ОБЛАСТЬ ВОЗМОЖНОСТИ ДВИЖЕНИЯ:

$$\mathfrak{M}^h=\{s:V(s)\leqslant h\}$$

состоит, вообще говоря, из нескольких связных кусков (рис. 42); в случае, когда один из кусков есть замкнутый отрезок (справа на рис. 42), говорят о движении в потенциальной яме; предполагается, что внутри этого отрезка $V(s)<h$.

Как известно, важным моментом при построении графика функции $V(s)$ является отыскание множества ее критических точек:

$$\{s^*:V'(s^*)=0\}.$$

Поскольку уравнение Ньютона у нас в силу теоремы имеет вид

$$m\ddot s=-V'(s), \tag{6.3}$$

видим, что критические точки потенциальной энергии имеют прозрачный динамический смысл — каждая из них есть **положение равновесия**: движение $s(t)\equiv s^*$ возможно тогда и только тогда, когда $V'(s^*)=0$. Энергия равновесия равна

$$h^*=V(s^*).$$

Это — соответствующее s^* критическое значение функции. При