где γ, δ — безразмерные величины. Тогда при достаточно малых h период колебаний

$$\tau(h) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \left(1 + \frac{5\gamma^2 - 3\delta}{24} \frac{h}{kl^2} + O\left(\left(\frac{h}{kl^2}\right)^2\right)\right)$$

(величина $\eta = h/kl^2$ называется безразмерной энергией; мы придали формуле именно такой вид, ибо на практике говорить о «малости» имеет смысл только для безразмерных величин; к этому мы еще вернемся).

Доказательство. Величины m, l, k размерно независимы, так что их можно принять равными единице.

Лемма Морса. Существует замена переменной $s = f(q)$ такая, что $V(f(q)) = q^2/2$.

Действительно, применим дважды лемму Адамара:

$$V(s) = s\psi(s), \ \psi(0) = V'(0) = 0 \Rightarrow \psi(s) = \frac{s}{2} \varphi(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{s^2}{2} \varphi(s), \ \varphi'(0) = V''(0) = 1.$$

Осталось положить $q(s) = s\sqrt{\varphi(s)}$.

Неравенство $V(s) < h$ приобретает вид $|q| \leqslant \sqrt{2h} = a$. Период

$$\tau(h) = 2 \int\limits_{s_1(h)}^{s_2(h)} \frac{ds}{\sqrt{2(h - V(s))}} = 2 \int\limits_{-a}^{a} \frac{f'(q)\,dq}{\sqrt{2h - q^2}}.$$

Положим $q = \sqrt{2h} \sin \xi$. Тогда

$$\tau(h) = 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f'(\sqrt{2h} \sin \xi)\, d\xi.$$

Разложим f в ряд Тейлора:

$$f = q + \frac{B}{2} q^2 + \frac{C}{6} q^3 + \frac{D}{24} q^4 + O(q^5),$$

$$f' = 1 + Bq + \frac{C}{2} q^2 + \frac{D}{6} q^3 + O(q^4).$$

Поэтому

$$\tau(h) = 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 + B\sqrt{2h} \sin \xi + Ch \sin^2 \xi + \frac{D}{6} \sqrt{2h^3} \sin^3 \xi +$$

$$+ O(h^2 \sin^2 \xi))\, d\xi.$$