Интегралы от нечетных функций $\sin\xi$ и $\sin^3\xi$ равны нулю, и

$$\tau(h) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 + Ch\sin^2\xi)\,d\xi + O(h^2) =$$

$$= 2\pi\left(1 + \frac{1}{2}Ch + 0(h^2)\right).$$

Осталось вычислить C. Для этого подставим разложение для $s = f(q)$ в разложение

$$V(s) = \frac{s^2}{2} + \frac{\gamma s^3}{6} + \frac{\delta s^4}{24} + O(s^5).$$

Получим

$$\frac{q^2}{2} = \frac{q^2}{2} + \left[\frac{B}{2} + \frac{\gamma}{6}\right]q^3 + \left[\frac{\delta}{24} + \frac{B^2}{8} + \frac{2C}{2\cdot 6} + \frac{3\gamma B}{2\cdot 6}\right]q^4 + O(q^5),$$

$$B = -\frac{\gamma}{3},\quad C = \frac{5\gamma^2 - 3\delta}{12}.$$

Доказательство на этом закончено.

Условимся считать безразмерную величину ε малой, если величинами вида $k\varepsilon^2$ можно пренебречь при заданной точности вычислений. Например, если задана точность 10^{-2n} и известно, что k не превосходит несколько десятков, то ε будет малой, если $|\varepsilon| < 10^{-(n+1)}$.

Из разложения $f(q)$ видно, что величины q и s малы одновременно. Если мала безразмерная амплитуда колебаний $q/l = \sqrt{2h/kl^2}$, то безразмерной энергией η уже можно пренебречь, и период получается равным

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

если же мала энергия колебаний, то

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{5\gamma^2 - 3\delta}{24}\,\frac{h}{kl^2}\right).$$

Нам осталось рассмотреть

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ,

которые происходят в случае, когда одна из границ нетривиальной ($s_1 \neq s_2$) потенциальной ямы является не точкой остановки, а положением равновесия: $V'(s_1) = 0$. Пусть $\dot{s}_0 > 0$. По лемме Адамара, примененной дважды, имеем

$$\frac{2}{m}(h - V(s)) = (s - s_1)^2\varphi(s),$$