Следствие теоремы. Пусть $M=\Sigma m_i$ — полна масса системы. Тогда

$$M\ddot{\mathbf{s}}=\mathbf{\Phi}=\Sigma\mathbf{\Phi}_i. \tag{7.12}$$

Если $\mathbf{\Phi}=\mathbf{\Phi}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t)$, то имеем уравнение Ньютона для одной точки. Таким образом, при определенных условиях центр масс можно рассматривать как материальную точку, мысленно сосредоточив в ней всю массу системы и приложив к ней формальную сумму всех внешних сил (мы не называем эту сумму силой, так как этот вектор не является характеристикой какого-либо «суммарного воздействия»; здесь нет сложения сил по принципу суперпозиции, ибо $\mathbf{\Phi}_i$ являются характеристиками воздействий на разные точки). Даже если в рамках принятой модели движения размерами системы пренебречь нельзя, центр масс все равно является геометрической точкой. Таким образом, модель материальной точки получает здесь как бы самое точное свое воплощение.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Пусть наряду с инерциальной системой отсчета $Oxyz$ есть система координат $A\xi\eta\zeta$, движущаяся поступательно (оси ее не вращаются). В этом случае $d/dt=\delta/\delta t$. Обозначим $\overline{OA}=\mathbf{l}$, $\boldsymbol{\rho}_i=\mathbf{r}_i-\mathbf{l}$.

Кинетическим моментом системы относительно системы координат $A\xi\eta\zeta$ называется вектор

$$\mathbf{\Lambda}_A=\sum_i m_i\,[\boldsymbol{\rho}_i\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_i].$$

Моментом сил относительно этой системы — вектор

$$\mathbf{G}_A=\sum_i[\boldsymbol{\rho}_i\times\mathcal{F}_i].$$

Производная кинетического момента $\mathbf{\Lambda}_A$ при движении равна моменту сил $\mathbf{G}_A$, т. е.

$$\frac{d\mathbf{\Lambda}_A}{dt}=\mathbf{G}_A \tag{7.13}$$

в следующих случаях:

1) $\ddot{\mathbf{l}}=\mathbf{0}$, т. е. система $A\xi\eta\zeta$ — тоже инерциальная (как и $Oxyz$);

2) $AS\equiv\mathbf{0}$, т. е. начало координат постоянно находится в центре масс (так называемые оси Кенига; соответствующий момент Λ_S именуется собственным кинетическим моментом системы);

3) $\ddot{\mathbf{l}}\neq\mathbf{0}$, $\overline{AS}\neq 0$, но $\ddot{\mathbf{l}}\parallel\overline{AS}$.

Доказательство. В системе координат $A\xi\eta\zeta$ к силе $\mathcal{F}_i$ прибавляется еще сила инерции $\mathbf{\Phi}_i^{\text{пер}}=-m_i\ddot{\mathbf{l}}$:

$$m_i\ddot{\boldsymbol{\rho}}_i=\mathcal{F}_i-m_i\ddot{\mathbf{l}},$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Lambda}_A=\sum m_i\,[\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\times\dot{\boldsymbol{\rho}}_i]+\sum[\boldsymbol{\rho}_i\times m_i\ddot{\boldsymbol{\rho}}_i]=$$