Определение. Пусть имеется функция $\varphi=\bar{\varphi}(q_1, ..., q_n)$ и замена переменных $q_i=q_i^*(\xi_1, ..., \xi_n)$, $i=1, ..., n$. Тогда функция φ в новых переменных приобретает вид

$$\varphi=\varphi^*(\xi_1, ..., \xi_n)=\bar{\varphi}(q_1^*(\xi_1, ..., \xi_n), ..., q_n^*(\xi_1, ..., \xi_n)).$$

Функция φ называется инвариантной при данной замене, если

$$\varphi^*(\xi_1, ..., \xi_n)=\bar{\varphi}(\xi_1, ..., \xi_n), \tag{8.1}$$

т. е. вместо того, чтобы подставлять формулы преобразования, достаточно в выражении $\bar{\varphi}$ вместо каждой буквы q_1 поставить букву ξ_1, вместо q_2 поставить ξ_2 и так далее.

Один из выводов четвертой темы гласит, что общий вид уравнения Ньютона сохраняется при преобразовании Галилея:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+u\tau \\ b+v\tau \\ c+w\tau \end{pmatrix} + Q\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad t=t_0+\tau.$$

Этот вывод дословно переносится в динамику системы. Примеры, с которых мы начали, показывают, что конкретный аналитический вид правых частей уравнения Ньютона в разных инерциальных системах отсчета может быть неодинаковым. Так вот, сейчас мы хотим рассмотреть системы, в которых аналитический вид правых частей, наоборот, остается инвариантным при всех преобразованиях Галилея. Для простоты мы рассмотрим случай, когда **силы потенциальны**, т. е. существует функция $V(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, t)$ такая, что

$$\mathbf{F}_i=-\mathrm{grad}_i\, V, \; i=1, ..., N,$$

или, более подробно, в проекциях на оси координат

$$X_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad Y_i=-\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad Z_i=-\frac{\partial V}{\partial z_i}, \tag{8.2}$$

и потребуем, чтобы потенциал V был инвариантен при всех преобразованиях Галилея. Выясним, что вытекает из этого свойства, беря по очереди частные преобразования.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СМЕЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ

Допустим, что сделано преобразование

$$x=\xi, \quad y=\eta, \quad z=\zeta, \quad t=\tau+t_0.$$

Тогда можно написать равенство типа (1):

$$V(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, t_0+\tau)=V(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, \tau).$$

Дифференцируя по t_0 и подставляя $t_0=0$, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t}\equiv 0. \tag{8.3}$$

Это — частная производная по времени. Ее не следует путать с