полной производной при движении:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_i (\mathrm{grad}_i V, \dot{r}_i),$$

которую мы перепишем с учетом (3) и уравнений Ньютона

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\mathrm{grad}_i V. \qquad (8.4)$$

Получим

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) = -\sum_i m_i \frac{d}{dt} \frac{(\dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)}{2} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = -\frac{dT}{dt}.$$

Итак, вдоль решений системы уравнений Ньютона (4)

$$\frac{d}{dt}(T+V) \equiv 0,$$

$$H = T + V = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = \mathrm{const}.$$

Мы пришли к тому, что полная энергия (сумма кинетической и потенциальной) сохраняется.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГОВ

Положим, например,

$$x = \xi + s, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad t = \tau.$$

Тогда имеем по определению инвариантности

$$V(\xi_1 + s, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_N + s, \eta_N, \zeta_N) =$$
$$= V(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_N, \eta_N, \zeta_N).$$

Дифференцируя по s и подставляя $s=0$, получаем

$$\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \equiv 0,$$

или в силу уравнений Ньютона

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \dot{x}_i \equiv 0,$$

т. е. функция $P_x = \Sigma m_i \dot{x}_i$ есть первый интеграл движения. Поступая аналогично с координатами y, z, получим

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathrm{const}.$$

Импульс системы сохраняется.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВОРОТОВ