Для начала дадим инвариантности эквивалентную, но несколько иную трактовку. Если выражение потенциала сохраняется при повороте системы координат, то равносильным образом (посмотрим как бы с точки зрения поворачивающихся осей) выражение сохраняется, если систему точек повернуть как твердое тело вокруг начала координат. Вспомним формулу конечного поворота на угол χ вокруг вектора $\mathbf{i}$:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \sin\chi[\mathbf{i}\times\mathbf{r}] + (1-\cos\chi)[\mathbf{i}\times[\mathbf{i}\times\mathbf{r}]].$$

Мы хотим, чтобы $V(\mathbf{r}_1', \ldots, \mathbf{r}_N') = V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$. Поскольку ясно, что нам предстоит дифференцировать по χ при $\chi=0$, формулу конечного поворота достаточно записать в виде

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \chi[\mathbf{i}\times\mathbf{r}_i] + O(\chi^2).$$

Теперь действуем по уже привычной схеме:

$$V(\mathbf{r}_1 + \chi[\mathbf{i}\times\mathbf{r}_1] + O(\chi^2), \ldots) = V(\mathbf{r}_1, \ldots),$$

$$\sum_k (\operatorname{grad}_k V, [\mathbf{i}\times\mathbf{r}_k]) = \sum_k ([\mathbf{r}_k\times\operatorname{grad}_k V], \mathbf{i}) \equiv 0.$$

Поскольку вектор $\mathbf{i}$ может иметь произвольное направление,

$$\sum_k [\mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_k] = \frac{d}{dt}\sum_k m_k[\mathbf{r}_k\times\dot{\mathbf{r}}_k] \equiv 0,$$

$$\Lambda_0 = \sum_k m_k[\mathbf{r}_k\times\dot{\mathbf{r}}_k] = \mathrm{const}.$$

Кинетический момент сохраняется.

Итог: **импульс, кинетический момент и полная энергия суть величины, сохраняющиеся при движении произвольной свободной системы с галилеево инвариантным потенциалом.**

При $N=1$ таких систем всего одна: $V=\mathrm{const}$. При $N=2$

$$V = \tilde{V}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

В самом деле,

$$\operatorname{grad}_1 V = -\operatorname{grad}_2 V \Rightarrow V = V'(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

$$[\mathbf{r}_1\times\operatorname{grad}_1 V] + [\mathbf{r}_2\times\operatorname{grad}_2 V] \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{r}\times\frac{\partial V'}{\partial\mathbf{r}} \equiv 0 \Rightarrow \operatorname{grad} V'(r) \parallel \operatorname{grad}\frac{r^2}{2}.$$

Перейдем к рассмотрению систем со связями. Нас интересует

ГАЛИЛЕЕВА ИНВАРИАНТНОСТЬ СВЯЗЕЙ.

Теорема 1 (об изменении кинетической энергии).

Если связи сохраняются при сдвиге времени, т. е.

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \equiv 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m,$$

то производная от кинетической энергии:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i (\mathbf{F}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$$

имеет такой же вид, как если бы связей не было.