В частности, *если силы консервативны,* это значит, что $\mathbf{F}_i = -\mathrm{grad}_i V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$, *то имеет место первый интеграл* (*интеграл энергии*): $H = T + V = h = \mathrm{const}$.

Доказательство. Имеем, согласно общей теореме из динамики свободной системы,

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i (\mathbf{F}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) + \sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha (\mathrm{grad}_i f_\alpha, \dot{r}_i).$$

Но

$$\sum_i (\mathrm{grad}_i f_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_i) = \frac{d}{dt} f_\alpha(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_N(t)) \equiv 0,$$

что и требовалось. Если $\mathbf{F}_i = -\mathrm{grad}_i V$, то $\Sigma(\mathbf{F}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) = -dV/dt$.

Теорема 2 (об изменении импульса).

Если связи сохраняются при сдвигах вдоль оси x, т. е.

$$\sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \equiv 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m,$$

то производная от импульса вдоль этой оси:

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_i X_i$$

имеет такой же вид, как если бы связей не было.

В частности, *если* $\Sigma X_i \equiv 0$, *то имеет место интеграл импульса* $\mathbf{P}_x = \mathrm{const}$.

Доказательство:

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_i \left(X_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right) = \sum_i X_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}.$$

Теорема 3 (об изменении момента).

Если связи сохраняются при поворотах вокруг оси Oz, **то производная от кинетического момента относительно этой оси:**

$$\frac{d}{dt} \Lambda_{Oz} = G_{Oz},$$

или подробнее

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i)$$

имеет такой же вид, как если бы связей не было.

В частности, *если* $G_{Oz} \equiv 0$, *то имеет место интеграл момента относительно этой оси.*

Доказательство. Инвариантность связей означает

$$f_\alpha(x_1 \cos\chi - y_1 \sin\chi,\ x_1 \sin\chi + y_1 \cos\chi,\ z_1, \ldots) = f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \ldots).$$