Дифференцируем по χ:

$$\sum_i \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} (-x_i \sin\chi - y_i \cos\chi) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} (x_i \cos\chi - y_i \sin\chi) \right]$$

и подставляем $\chi=0$:

$$\sum_i \left(x_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right) \equiv 0.$$

Далее ясно.

Примером системы, у которой связи инвариантны относительно всей группы Галилея, является

СВОБОДНОЕ ТВЕРДОЕ ТЕЛО —

система точек, на которую наложены все возможные связи типа равенства попарных расстояний и не наложено никаких других (из сказанного формально вытекает, что следует наложить $N(N-1)/2$ связей; на самом деле, очевидно, достаточно иметь всего

$$3+3(N-3)=3N-6 \text{ —}$$

сохраняются попарные расстояния между тремя отмеченными точками и расстояния от каждой из оставшихся до трех отмеченных).

Тема 9

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Здесь мы рассматриваем систему материальных точек, попарные расстояния между которыми с течением времени заведомо не будут меняться. За счет чего? В силу вышесказанного мы либо можем считать, что дана идеализированная система со связями $(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)^2=l_{ij}^2=\text{const}$, природа которых нас не интересует, либо скажем, что точки удерживаются какими-то внутренними силами $\mathbf{f}_{ij}=-\mathbf{f}_{ij}$, причем $\mathbf{f}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)$. Эти трактовки равносильны и позволяют применить к твердому телу все общие теоремы динамики, выписывая в правых частях соответствующих уравнений только силы $\mathcal{F}_i$, внешние по отношению к этой системе:

а) заданные силы;

б) реакции дополнительных связей, если таковые имеются. Специфика рассматриваемой модели — и ее непременно надо учесть при применении теорем — состоит в том, что распределение скоростей $\mathbf{v}_i$ в системе «твердое тело» определяется скоростью одной произвольно отмеченной точки и вектором угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$. Начнем с того, что изучим

ВРАЩЕНИЕ.

Пусть в системе координат $Q\xi\eta\zeta$ тело вращается вокруг точки Q (точка Q принадлежит телу и неподвижна). Тогда

$$\mathbf{v}_i = \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = [\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i], \quad \boldsymbol{\rho}_i = \overline{Qm_i}.$$