Вычислим кинетический момент и кинетическую энергию в этой системе:

$$\Lambda_Q = \sum m_i [\rho_i \times \dot{\rho}_i], \quad T_Q = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{\rho}_i^2 .$$

Индекс суммирования i впредь условимся не писать. Имеем

$$\Lambda_Q = \sum m [\rho \times \dot{\rho}] = \sum m [\rho \times [\omega \times \rho]],$$

$$T_Q = \frac{1}{2}\sum m \dot{\rho}^2 = \frac{1}{2}\sum m ([\omega \times \rho], [\omega \times \rho]) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m (\omega, [\rho \times [\omega \times \rho]]) = \frac{1}{2}(\omega, \Lambda_Q).$$

Легко видеть, что в произвольно взятом положении тела его кинетический момент линейно зависит от ω, а кинетическая энергия — квадратично. Более того,

$$\Lambda_Q = \mathrm{grad}_\omega T_Q. \tag{9.1}$$

В частности и более подробно:

$$\Lambda_{Q\xi} = \frac{\partial T_Q(\omega)}{\partial \omega_\xi}, \quad \Lambda_{Q\eta} = \frac{\partial T_Q(\omega)}{\partial \omega_\eta}, \quad \Lambda_{Q\zeta} = \frac{\partial T_Q(\omega)}{\partial \omega_\zeta}.$$

Действительно, подставим $\omega = \omega_\xi e_\xi + \omega_\eta e_\eta + \omega_\zeta e_\zeta$ в выражение $T = \frac{1}{2}\sum m ([\omega \times \rho], [\omega \times \rho])$ и продифференцируем, например, по ω_ξ. В каждом слагаемом надо дифференцировать по очереди каждый из векторных сомножителей. Но они одинаковы, так что можно взять удвоенную производную по первому сомножителю:

$$\frac{\partial T_Q}{\partial \omega_\xi} = \sum m \left(\frac{\partial}{\partial \omega_\xi}[\omega \times \rho], [\omega \times \rho]\right) =$$

$$= \sum m \left(\left[\frac{\partial \omega}{\partial \omega_\xi} \times \rho\right], [\omega \times \rho]\right) = \sum m ([e_\xi \times \rho], [\omega \times \rho]) =$$

$$= \sum m (e_\xi, [\rho \times [\omega \times \rho]]) = (e_\xi, \sum m [\rho \times [\omega \times \rho]]) = (e_\xi; \Lambda_Q) = \Lambda_{Q\xi} .$$

Теорема. В точке Q существует связанный с телом репер e, e', e'' такой, что если $\omega = pe + qe' + re''$, то

$$\Lambda_Q = Ape' + Bqe' + Cre'', \tag{9.2}$$

$$T_Q = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \tag{9.3}$$

где A, B, C — некоторые положительные (тело считается невырожденным) величины, зависящие от точки Q.

Доказательство. Разложим все векторы, входящие в выражение энергии, по произвольным осям, жестко связанным с телом (называть эти оси никак не будем). Легко видеть, что значение $T_Q(\omega)$ зависит только от расположения вектора ω в этих