осях и не зависит от ориентации тела, так как координаты всех масс в этих осях постоянны:

$$T_Q = (\omega,\ \Sigma \underline{m} [\underline{\rho} \times [\omega \times \underline{\rho}]])$$

(подчеркнуты неизменные слагаемые и сомножители). Следовательно, поверхность, заданная уравнением

$$2T_Q(\omega) = 1$$

(геометрическое место соответствующих концов векторов ω), тоже жестко связана с телом. Поскольку выражение для T_Q квадратично по компонентам вектора ω и положительно определено, поверхность эта — эллипсоид, так называемый **эллипсоид инерции.** У всякого эллипсоида есть три ортогональных направления $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, e'', называемых главными, таких, что в соответствующей (можно считать, правой) системе координат его уравнение имеет вид

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 1.$$

Следовательно,

$$T_Q = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

$$\Lambda_Q = \mathrm{grad}_\omega T_Q = Ap\mathbf{e} + Bq\mathbf{e}' + Cr\mathbf{e}''.$$

Теорема доказана. Чтобы уяснить смысл величин A, B, C, положим $\rho = x\mathbf{e} + y\mathbf{e}' + z\mathbf{e}''$ (индекс i по-прежнему опущен):

$$A = 2T_Q(\mathbf{e}_\xi) = (\mathbf{e}_\xi, \textstyle\sum m[\rho \times [\mathbf{e}_\xi \times \rho]]) =$$
$$= (\mathbf{e}_\xi, \textstyle\sum m(\rho^2 e_\xi - (\rho, \mathbf{e}_\xi)\mathbf{e}_\xi)) = \textstyle\sum m(\rho^2 - (\rho, \mathbf{e}_\xi)^2) =$$
$$= \textstyle\sum m(x^2 + y^2 + z^2 - x^2) = \textstyle\sum m(y^2 + z^2);$$

и аналогично

$$B = \Sigma m(z^2 + x^2),\quad C = \Sigma m(x^2 + y^2).$$

Это — **главные моменты инерции**, т. е. моменты инерции относительно главных направлений в точке Q. Вообще моментом инерции относительно оси $Q\mathbf{f}$, проходящей через точку Q в направлении единичного вектора $\mathbf{f}$, называется число

$$I_Q(\mathbf{f}) = \textstyle\sum m\delta^2 = \textstyle\sum m(\rho^2 - (\rho, \mathbf{f})^2), \tag{9.4}$$

где δ — расстояние от точки m до этой оси. Итак,

$$A = I_Q(\mathbf{e}),\quad B = I_Q(\mathbf{e}'),\quad C = I_Q(\mathbf{e}'').$$

Если $\omega = \omega\mathbf{f}$, $\mathbf{f} = \alpha\mathbf{e} + \beta\mathbf{e}' + \gamma\mathbf{e}''$, то, очевидно,

$$T_Q = \frac{\omega^2}{2} I_Q(\mathbf{f}),$$

$$I_Q(f) = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2,\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{9.5}$$

Эллипсоид инерции сжат в направлении главной оси, отвечающей наибольшему моменту инерции, и вытянут в направлении оси с наименьшим моментом (рис. 17). Если тело переходит само