Тема 10

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ В РАЗНЫХ АСПЕКТАХ

Мы говорим, что имеется замкнутая система материальных точек, если в ней действуют только внутренние силы:

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j\neq i} \mathbf{f}_{ij}, \tag{10.1}$$

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} \| \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j.$$

У такой системы сохраняется кинетический момент, импульс и очень часто полная энергия (но это не обязательно, так как в числе внутренних сил могут быть силы трения). Первым и очень важным примером является

КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\dfrac{fm_1m_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2), \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\dfrac{fm_1m_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1). \end{cases} \tag{10.2}$$

Она сводится к задаче о движении одной точки в поле тяготения неподвижного центра двумя способами. Первый: разделим уравнения (10.1) на m_1 и m_2 соответственно и вычтем; получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{f(m_1+m_2)}{|r|^3}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \tag{10.3}$$

Это уравнение движения точки единичной массы в поле тяготения точки массы $M = m_1 + m_2$.

Второй способ. Учтем, что центр масс движется равномерно, и перейдем в систему координат с невращающимися осями и началом в S. Это — инерциальная система, в которой справедливы уравнения (1) с заменой $\mathbf{r}_i$ на ϱ_i; кроме того,

$$m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2 \equiv 0. \tag{10.4}$$

Используя это, получим

$$\rho_1 - \rho_2 = \pm\frac{m_1+m_2}{m_1m_2} m_i\rho_i,$$

$$\ddot{\rho}_i = -f\frac{Mm^3}{m_i^3|\rho_i|^3}\rho_i. \tag{10.5}$$

Последнее аналогично (10.3). Величина

$$m = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{10.6}$$

называется приведенной массой системы. Заметим, что (10.3) можно представить в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{fm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} = -\operatorname{grad}\frac{fm_1m_2}{r}.$$