Поэтому проделанные рассуждения легко обобщить: движение двух материальных точек с галилеево-инвариантным потенциалом:

$$V=\bar{V}(|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|) \tag{10.7}$$

приводится путем исключения интеграла импульса к исследованию движения материальной точки, имеющей приведенную массу m в поле с потенциалом $V=\bar{V}(|\mathbf{r}|)$. Итак, рассмотрим

ДВИЖЕНИЕ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ:

$$m\ddot{\mathbf{r}}=-\operatorname{grad} V(|\mathbf{r}|); \tag{10.8}$$

это движение обладает интегралами кинетического момента:

$$[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}]=\mathbf{c} \tag{10.9}$$

(на массу мы сократили) и энергии:

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2+V(r)=h. \tag{10.10}$$

Эти интегралы позволят нам детально исследовать движение. Подчеркнем, что уравнения (8) не потребуются вовсе.

Лемма.

Движение происходит всегда в так называемой плоскости Лапласа, перпендикулярной постоянному вектору кинетического момента с, если $\mathbf{c}\neq 0$.

Если же $\mathbf{c}=0$, *то движение происходит по прямой.*

Действительно, $(\mathbf{r}(t),\ \mathbf{c})=(\mathbf{r},\ [\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}])\equiv 0$. При $\mathbf{c}=0$ начальные условия таковы, что $\mathbf{r}_0\|\dot{\mathbf{r}}_0$, и последнее утверждение следует из теоремы о единственности решений: движение может происходить по прямой и потому обязательно будет именно таким.

Итак, при $\mathbf{c}=0$ мы непосредственно имеем прямолинейное движение в потенциальном поле (тема 5). Впредь считаем $\mathbf{c}\neq 0$. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $\mathbf{c}=c\mathbf{e}_z$, $c>0$, т. е. движение происходит в плоскости Oxy. Интегралы движения принимают вид

$$(x\dot{y}-y\dot{x})=c, \tag{10.11}$$
$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+V(\sqrt{x^2+y^2})=h.$$

Поскольку $V=V(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, напрашивается мысль использовать полярные координаты $r>0$, $\varphi \bmod 2\pi$;

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

Задать движение можно и при помощи функций $x=x_*(t)$, $y=y_*(t)$, и при помощи функций $r=r_*(t)$, $\varphi=\varphi_*(t)$; при этом

$$\dot{x}=\cos\varphi\dot{r}-r\sin\varphi\dot{\varphi},\ \dot{y}=\sin\varphi\dot{r}+r\cos\varphi\dot{\varphi}.$$

Подставляя эти зависимости в интегралы движения (11), пере-