писываем последние в новом, более удобном виде:

$$H=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)+V(r)=h, \tag{10.12}$$

$$r^2\dot\varphi=c.$$

Из интеграла момента

$$\dot\varphi=c/r^2, \tag{10.13}$$

так что после подстановки в интеграл энергии получаем

$$\frac{m\dot r^2}{2}+\frac{mc^2}{2r^2}+V(r)=h \tag{10.14}$$

(ниже мы покажем, почему во многих задачах можно заранее быть уверенным, что $r(t)$ никогда не обращается в нуль при $c\neq0$). Видим, что изменение $r(t)$ полностью определяет

приведенная потенциальная энергия:

$$V_c(r)=\frac{mc^2}{2r^2}+V(r) \tag{10.15}$$

по формулам одномерного движения. Слово «приведение» здесь означает, что исключается из рассмотрения координата φ.

Пока $r(t)\neq0$, радиус-вектор поворачивается все время в одну и ту же сторону, заметая при этом равные площади в равные промежутки времени. В самом деле, из (13) видно, что $\dot\varphi>0$, т. е. $\varphi(t)$ — монотонная функция. Что касается площади, то известно, что площадь криволинейного сектора (рис. 50)

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}\,r^2d\varphi=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}r^2\dot\varphi dt=\frac{c}{2}\,(t_2-t_1),$$

что и требовалось. Поскольку $r^2\dot\varphi=2dS/dt$, интеграл момента часто называют интегралом площадей.

Находить $r(t)$, а потом $\varphi(t)$ неудобно и не наглядно. Попробуем определять траектории движения, т. е. зависимости $r=r(\varphi)$. Поскольку $\varphi=\varphi_*(t)$ — монотонная функция, то она имеет обратную, причем глобально на всей области определения (пока $r(t)\neq\neq0$). Обозначим ее $t=t^*(\varphi)$. Подставляя в $r=r^*(t)$, получим $r=r^{**}(\varphi)$. Имеем (опуская звездочки)

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}=-c\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r}.$$

Функция $\rho=1/r$ называется обратным (в алгебраическом смысле слова) радиусом.

Внесем $dr/dt=-cd\rho/d\varphi$ в интеграл энергии:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\underbrace{\frac{1}{c^2}V_c\left(\frac{1}{\rho}\right)}_{\Pi_c(\rho)}=\frac{h}{c^2}. \tag{10.16}$$