Последняя зависимость снова имеет такой же вид, как интеграл энергии в одномерном движении. Отсюда вытекает возможность определить $\rho(\varphi)$ (а потом $r(\varphi)$) в квадратурах.

Важнейшим примером является

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА: $V=-\dfrac{\mu m}{r}$.

Имеем (рис. 53)

$$V_c=\frac{mc^2}{2r^2}-\frac{\mu m}{r},\quad \Pi_c=\frac{m\rho^2}{2}-\frac{\mu m\rho}{c^2}.$$

Поскольку размерности

$$[m]=\mathrm{M},\ [c]=\mathrm{L}^2/\mathrm{T},\ [\mu]=\mathrm{L}^3/\mathrm{T}^2$$

независимы, для выкладок примем $m=\mu=c=1$. Тогда

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=2h-\rho^2+2\rho,$$

$$\pm\frac{d\rho}{\sqrt{1+2h-(\rho-1)^2}}=d\varphi,$$

$$\operatorname{Arccos}\frac{\rho-1}{1+2h}=\varphi-\varphi_0.$$

Последний шаг надо трактовать так: каждая ветвь многозначной функции Arccos удовлетворяет предшествующему дифференциальному уравнению со знаком плюс или минус. Вместе с тем переход от одной ветви к другой в некотором смысле непрерывен (рис. 41). Итак, оперируя с многозначной функцией, мы избавились от поэтапного интегрирования с чередованием знаков, какое проводили в теме 6. Это вполне соответствует существу дела и показывает, что упомянутую многозначность не следует принимать слишком всерьез. Осталось написать

$$\rho=1+(1+2h)\cos(\varphi-\varphi_0).$$

В размерных переменных

$$\frac{c^2}{\mu}\rho=1+\left(1+\frac{2hc^2}{m\mu^2}\right)\cos(\varphi-\varphi_0),$$

или

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}{p},\quad p=\frac{c^2}{\mu},\quad e=1+\frac{2hc^2}{m\mu^2}.$$

Это — фокальное уравнение конического сечения в полярных координатах, а именно получается

при $0\leqslant e<1$ $(-m\mu^2/c^2\leqslant h<0)$ эллипс,

при $e=1$ $(h=0)$ парабола,

при $e>1$ $(h>0)$ гипербола.

Можно попробовать найти $\varphi(t)$. Из интеграла площадей

$$r^2d\varphi=c\,dt,$$