$$t-t_0=\frac{1}{c}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\varphi=\frac{p^2}{c}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2}.$$

Этот интеграл берется подстановкой

$$\cos(\varphi-\varphi_0)=\frac{\cos E-e}{1-e\cos E},$$

после чего

$$t-t_0=\frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}\,(1-e^2)^{3/2}}(E-e\sin E). \tag{10.17}$$

Переменная $\theta=\varphi-\varphi_0$ называется истинной аномалией, переменная E — эксцентрической аномалией. Она имеет простой геометрический смысл (рис. 55). Выразить E через t в элементарных функциях невозможно.

Найдем период обращения τ в эллиптическом движении. Площадь эллипса равна, очевидно, $S=c\tau/2$. С другой стороны, известно, что $S=\pi ab=\pi a^2\sqrt{1-e^2}$, где a, b большая и малая полуоси эллипса:

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e}+\frac{p}{1-e}\right)=\frac{p}{1-e^2}=-\frac{\mu m}{2h}.$$

Отсюда

$$\tau=\frac{2\pi}{c}a^2\sqrt{1-e^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{p\mu}}a^2\sqrt{1-e^2}=\frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}.$$

Это согласуется с (10.7), если посмотреть, на сколько изменится t, когда E изменится на 2π.

В произвольном поле с потенциалом $V(r)$ аналогом и обобщением эллиптического движения в задаче Кеплера являются

ФИНИТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ.

Если зафиксированы постоянные c, h, то из (14) следует, что траектория $r(\varphi)$ лежит в области возможности движения:

$$\mathfrak{M}_c^h=\{r,\varphi: V_c(r)\leqslant h\}. \tag{10.18}$$

Когда на графике V_c получается потенциальная яма, имеем $\mathfrak{M}_c^h$, вообще говоря, в виде кольца:

$$\mathfrak{M}_c^h=\{r_2\leqslant r\leqslant r_1\}.$$

В общем случае таких колец может быть несколько, возможно также, что $r_2=0$ или $r_1=\infty$. Движение называется финитным, когда оно происходит в замкнутой связной компоненте $\mathfrak{M}_c^h$:

$$0<r_2\leqslant r\leqslant r_1<\infty,$$

т. е. не уходит в бесконечность и не падает в центр силы. Для