обратного радиуса аналогично должно быть

$$0<\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2<\infty,\quad \rho_i=\frac{1}{r_i},$$

а на графике Π_c также получается потенциальная яма.

Как установлено в теме 6, в этих условиях $\rho(\varphi)$ периодически изменяется от ρ_2 до ρ_1 и обратно, а следовательно, $r(\varphi)$ периодически изменяется от r_2 до r_1. В итоге имеем качественную картину траекторий, типа изображенной на рис. 52. Все участки траектории между границами кольца одинаковы. Кстати, можно обратить внимание, что в окрестности меньшего радиуса на рис. 52 сила получается отталкивающей (разложить ее по естественному реперу), а в окрестности большего радиуса — притягивающей. Если имеем только притягивающую силу, то картина должна быть такой, как на рис. 47. Угол Φ между максимумом и минимумом $r(\varphi)$ (это аналог полупериода при движении по прямой) называется апсидальным. Он равен

$$\Phi(c, h)=\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{h}{c^2}-\Pi_c(\rho)\right)}}. \tag{10.19}$$

В задаче Кеплера при $h<0$ имеем $\Phi\equiv\pi$ (рис. 54), для гармонического осциллятора $\Phi\equiv\pi/2$.

Критическим точкам функции V_c (или Π_c) отвечают относительные равновесия:

$$\begin{gathered} r(t)\equiv r_*\Leftrightarrow\frac{d}{dr}V_c(r)\,|_{r=r_*}=0,\\ \rho(\varphi)\equiv\rho_*\Leftrightarrow\frac{d}{d\rho}\Pi_c(\rho)\,|_{\rho=\rho_*}=0. \end{gathered} \tag{10.20}$$

В этом случае

$$\dot\varphi=\frac{c}{r_*^2}=\text{const},\quad h_*=\frac{m}{2}r_*^2\dot\varphi^2+V(r_*)=\frac{mc^2}{2r_*^2}+V(r_*)=V_c(r_*),$$

т. е. энергия относительного равновесия, отвечающего критической точке приведенной потенциальной энергии V_c, равна соответствующему критическому значению.

Если критическая точка есть минимум, то про соответствующее относительное равновесие говорят, что оно орбитально устойчиво (так как близкие движения лежат в узком кольце), в противном случае — неустойчиво (вспомним асимптотические движения в одномерных системах, аналог которых имеется и здесь). Если h не намного отличается от минимального значения h_*, то по формуле Линдштедта (тема 6)

$$\Phi(c, h)=\pi\sqrt{\frac{\Pi_c''}{m}}\left(1+\frac{5\Pi_c'''^2-3\Pi_c''\Pi_c''''}{24\Pi_c''^3}(h-h_*)\right)+O(h-h_*)^2,$$

причем все производные $({}'\equiv d/d\rho)$ вычисляются при $\rho=\rho_*$.