Теорема Бертрана. **Предположим, что потенциальная энергия $V(r)$ такова, что**

1) существуют нетривиальные (отличные от относительных равновесий) финитные движения;

2) траектории всех финитных движений замкнуты.

Тогда

$$V = -\frac{\mu m}{r}, \ \mu > 0,$$

или

$$V = \frac{1}{2} kr^2, \ k > 0,$$

т. е. имеем тяготение Ньютона или упругую силу.

Доказательство. Можно считать $m=1$. Для того чтобы траектория была замкнута, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi(c, h) = \frac{p}{q}\pi,$$

где p, q — натуральные числа без общих делителей. Поскольку $\Phi(c, h)$ — непрерывная функция, отсюда следует, что $\Phi(c, h) = \mathrm{const}$ в связной области определения. Но тогда на основании формулы Линдштедта

$$\Psi(c) = \lim_{h\to h_*} \Phi(c, h) = \pi\sqrt{\Pi_c''} = \mathrm{const}, \tag{10.21}$$

и

$$5\Pi_c'''^2 - 3\Pi_c''\Pi_c''''\big|_{\rho_*} = 0 \tag{10.22}$$

для всех $\rho_*(c)$, определяемых из уравнения

$$\Pi_c' = \rho + \frac{1}{c^2} W'(\rho) = 0, \ W(\rho) = V\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{10.23}$$

Используем первое обстоятельство: имеем

$$\Pi_c'' = 1 + \frac{1}{c^2} W''(\rho),$$

так что

$$\Psi(c) = \mathrm{const} \Rightarrow \frac{W''(\rho_*(c))}{c^2} = \lambda = \mathrm{const}.$$

Отсюда с учетом (23)

$$\rho W'' + \lambda W' = 0,$$
$$W' = K\rho^{-\lambda}.$$

Дифференцируя, получаем

$$\Pi_c'' = 1 - K\lambda\rho^{-\lambda-1},$$