Нам надо вычислить векторы $\mathbf{F}$, $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{G}_S$ в зависимости от взаимного расположения тела и точки.

Заметим для этого, что система «тело—точка» является замкнутой, так что сохраняются ее импульс:

$$\overline{\mathbf{P}} = M\dot{\mathbf{s}} + \mu\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{const},$$

и кинетический момент относительного общего центра масс:

$$\overline{\mathbf{\Lambda}}_A = M[\boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{\sigma}}] + \mu[\boldsymbol{\delta} \times \dot{\boldsymbol{\delta}}] + \mathbf{\Lambda}_S = \text{const}.$$

Иными словами,

$$\dot{\overline{\mathbf{P}}} = M\ddot{\mathbf{s}} + \mu\ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{\Phi} + \mathbf{F} \equiv 0,$$

$$M[\boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{\sigma}}] + \mu[\boldsymbol{\delta} \times \ddot{\boldsymbol{\delta}}] + \frac{d\mathbf{\Lambda}_S}{dt} = [\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{\Phi}] + [\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{F}] + \mathbf{G}_S \equiv 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{\Phi} = -\mathbf{F} \tag{10.24}$$

(но не обязательно $\mathbf{\Phi}$, $F \| \overline{SP}$!),

$$\mathbf{G}_S = -[\overline{SP} \times \mathbf{F}]. \tag{10.25}$$

Формулы (24) и (25), во-первых, сводят вопрос о вычислении $\mathbf{F}$, $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{G}_S$ к определению только $\mathbf{F}$. Во-вторых, они носят векторный характер, так что их можно раскладывать по любому реперу. Выберем тот, который удобнее всего: главный центральный репер $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}''$ тела M. Тогда нам фактически осталось вычислить силу притяжения массы μ к неподвижному телу M. Эта сила потенциальна. Поэтому вычислим

ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ТЕЛА.

Пусть в репере $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}''$ точка μ имеет радиус-вектор $\mathbf{r} = \overline{SP}$ и координаты

$$x = r\alpha, \ y = r\beta, \ z = r\gamma, \ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

и пусть тело состоит из точек m_i с радиусами-векторами $\boldsymbol{\varrho}_i$. Тогда (ср. с темой 3)

$$V = -f\mu \sum_i \frac{m_i}{|\boldsymbol{\rho}_i - \mathbf{r}|}.$$

Разложим потенциал по степеням обратного радиуса. Пусть R — характерный размер тела. Будем вести разложение по степеням R/r. Для выкладок положим $f\mu = M = R = 1$, индекс суммирования i опустим и обозначим $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$:

$$-V = \sum \frac{m}{\sqrt{(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{r})}} = \frac{1}{r} \sum \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{e}_r) + \frac{\rho^2}{r^2}}} =$$

$$\left(\text{поскольку } (1 + \chi)^{-1/2} = 1 - \frac{\chi}{2} + \frac{3}{8}\chi^2 + \ldots\right)$$