Тема 11
УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ЛАГРАНЖА

Мы приступаем к изучению лагранжева формализма, который состоит в использовании уравнений второго порядка:

$$\ddot{q}_i=X_i(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t), \; i=1, \ldots, n \tag{11.1}$$

специального вида. Но прежде чем конкретизировать этот вид, потребуется ряд определений, и в первую очередь

ДВА ВАРИАНТА ПОЛНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ.

Обозначим $q=(q_1, \ldots, q_n)$, $\dot{q}=(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$.

Определение 1. Пусть имеется функция $f=f(q, t)$. Ее полной производной по времени называется функция

$$\dot{f}(\dot{q}, q, t)=\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i, \tag{11.2}$$

зависящая уже от $\dot{q}$, q, t. Если $q=q(t)$, то

$$\frac{d}{dt}f(q(t), t)=\dot{f}\left(\frac{dq}{dt}, q(t), t\right). \tag{11.3}$$

Определение 2. Пусть задана функция $F=F(\dot{q}, q, t)$. Ее полной производной по времени называется функция

$$\dot{F}(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)=\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i, \tag{11.4}$$

зависящая от $\ddot{q}$, $\dot{q}$, q, t. Аналогично (3)

$$\frac{d}{dt}F\left(\frac{dq}{dt}, q(t), t\right)=\dot{F}\left(\frac{d^2q}{dt^2}, \frac{dq}{dt}, q(t), t\right). \tag{11.5}$$

Легко проверить, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{df}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{dF}{dt}-\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{dF}{dt}. \tag{11.6}$$

Определение 3. Если имеется система дифференциальных уравнений второго порядка (1), то полной производной функции в силу системы называется функция

$$\frac{d^X}{dt}F=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}X_i, \tag{11.7}$$

зависящая только от $\dot{q}$, q, t.

Индекс X обычно не пишут, и приходится из контекста уяснять, какая из производных dF/dt имеется в виду, за исключени-