ем разве что ситуации

$$f=f(q,t)\Rightarrow\frac{d^X}{dt}f=\dot f. \tag{11.8}$$

Если $d^XF/dt\equiv 0$, то F — первый интеграл системы (1), т. е. $F(\dot q(t), q(t), t)=\mathrm{const}$ для всех ее решений.

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ (ПОДСТАНОВКА)

по определению имеется тогда, когда заданы зависимости

$$\begin{array}{c} q_1=q_1^*(\xi_1,\ldots,\xi_m,t),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ q_n=q_n^*(\xi_1,\ldots,\xi_m,t). \end{array} \tag{11.9}$$

Обычно принимается, что $m=n$, но пока это не обязательно. Начнем с рассмотрения замен, не зависящих от времени:

$$q=q^*(\xi). \tag{11.10}$$

Если в пространстве $\mathbf{R}^m(\xi)$ есть кривая $\xi=\xi(t)$, то в силу (10) она отображается в пространство $\mathbf{R}^n(q)$: $q=\bar q(t)=q^*(\xi(t))$ и при этом

$$\frac{dq_i}{dt}=\sum_\alpha\frac{\partial q_i}{\partial\xi_\alpha}\frac{d\xi_\alpha}{dt}. \tag{11.11}$$

Если дана функция $f=f(q_1,\ldots,q_n)$, то для сложной функции (композиции) $f^*(\xi)=f(q^*(\xi))$ справедливо

$$\frac{\partial f^*}{\partial\xi_\alpha}=\sum_i\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\xi_\alpha}. \tag{11.12}$$

Введем диаграмму

$$\mathbf{R}_t\xrightarrow[N0]{\xi^*}\mathbf{R}^m_\xi\xrightarrow[N1]{q^*}\mathbf{R}^n_q\xrightarrow[N2]{f}\mathbf{R},$$

в которой занумерованы все зависимости в естественном порядке, и перепишем равенства (2) и (3) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dq_1}{dt}\\ \dfrac{dq_2}{dt}\\ \vdots\\ \dfrac{dq_n}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial q_1}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial q_1}{\partial\xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_1}{\partial\xi_m}\\ \dfrac{\partial q_2}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial q_2}{\partial\xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_2}{\partial\xi_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial q_n}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial q_n}{\partial\xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial\xi_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{d\xi_1}{dt}\\ \dfrac{d\xi_2}{dt}\\ \vdots\\ \dfrac{d\xi_m}{dt}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial\xi_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial\xi_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial\xi_m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial q_1}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial q_2}{\partial\xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial\xi_1}\\ \dfrac{\partial q_1}{\partial\xi_2} & \dfrac{\partial q_2}{\partial\xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial\xi_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial q_1}{\partial\xi_m} & \dfrac{\partial q_2}{\partial\xi_m} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial\xi_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial q_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial q_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial q_n}\end{pmatrix}.$$