Имеем зависимость между матрицами Якоби, причем основная матрица $\partial q/\partial\xi$ представлена в двух вариантах, отличающихся транспонированием. Введем сокращенные обозначения:

$$\underset{}{\frac{'dq}{dt}} = \underset{N1}{\frac{'\partial q^*}{\partial\xi}}\,\underset{N0}{\frac{'d\xi}{dt}}, \quad \underset{}{\frac{\partial f^*}{\partial'\xi}} = \underset{N1}{\frac{\partial q^*}{\partial'\xi}}\,\underset{N2}{\frac{\partial f}{\partial' q}}.$$

Штрих около символа дифференцирования означает, во-первых, что соответствующие переменные стоят по столбцам. Во-вторых, штрих стоит с той стороны, с которой надо множить матрицу Якоби очередной зависимости при составлении композиций.

Будем говорить, что столбец $\frac{'dq}{dt}$ преобразуется в столбец $\frac{'d\xi}{dt}$ по векторному правилу (вспомним вектор скорости) и что столбец $\frac{\partial f}{\partial' q}$ преобразуется в столбец $\frac{\partial f}{\partial'\xi}$ по ковекторному правилу. Когда из контекста ясно, какие переменные стоят по столбцам, условимся штрих не писать.

Теперь рассмотрим более общие замены

$$q = q^*(\xi, t):$$

$$\dot q_i = \dot q^*_i(\dot\xi;\ \xi, t) = \sum_\alpha \frac{\partial q^*_i}{\partial\xi_\alpha}\dot\xi_\alpha + \frac{\partial q_i}{dt}, \tag{11.13}$$

$$\ddot q_i = \sum_\alpha \frac{\partial q^*_i}{\partial\xi_\alpha}\ddot\xi_\alpha + \ldots. \tag{11.14}$$

Многоточием здесь обозначены выражения, содержащие только $\dot\xi$, ξ, t. Если имеются функции

$$f(q, t),\ F(\dot q, q, t),\ \Phi(\ddot q, \dot q, q, t),$$

то обозначим звездочкой результат подстановки:

$$f^*(\xi, t) = f(q^*(\xi, t), t),$$

$$F^*(\dot\xi, \xi, t) = F(\dot q^*(\dot\xi, \xi, t), q^*(\xi, t), t),$$

$$\Phi^*(\ddot\xi, \dot\xi, \xi, t) = \Phi(\ddot q^*(\ddot\xi, \dot\xi, \xi, t), \dot q^*(\dot\xi, \xi, t), q^*(\xi, t), t).$$

Леммы.

0. В силу (13) и (14)

$$\frac{\partial\ddot q^*_i}{\partial\ddot\xi_\alpha} = \frac{\partial\dot q^*_i}{\partial\dot\xi_\alpha} = \frac{\partial q^*_i}{\partial\xi_\alpha}.$$

1. Столбец $\frac{\partial f}{\partial q}$ преобразуется в столбец $\frac{\partial f^*}{\partial\xi}$ по ковекторному правилу:

$$\frac{\partial f^*}{\partial\xi_\alpha} = \sum_i \frac{\partial q^*_i}{\partial\xi_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)^*. \tag{11.15}$$