2. Столбец $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}$ преобразуется в столбец $\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\xi}}$ по ковекторному правилу:

$$\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)^* \frac{\partial \dot{q}^*_i}{\partial \dot{\xi}_\alpha} = \sum_i \frac{\partial q^*_i}{\partial \xi_\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)^*. \tag{11.16}$$

Предложение. Всегда

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^* = \frac{d}{dt} f^*, \quad \left(\frac{dF}{dt}\right)^* = \frac{d}{dt} F^*, \tag{11.17}$$

т. е. можно сначала вычислить полную производную, потом сделать замену, а можно наоборот. Для контраста заметим, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^* \neq \frac{\partial f^*}{\partial t}, \tag{11.18}$$

так как

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)^* \frac{\partial q^*_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^*. \tag{11.19}$$

Тривиальный вывод (17) опустим.

СТУПЕНЧАТАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

(производная Эйлера—Лагранжа)

индекса i функции $F(\dot{q}, q, t)$ вычисляется по формуле

$$[F]_{q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}. \tag{11.20}$$

В частности,

$$[f]_{q_i} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}, \tag{11.21}$$

$$\left[\sum_k f_k \dot{q}_k\right]_{q_i} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k, \tag{11.22}$$

$$[\dot{f}]_{q_i} \equiv 0. \tag{11.23}$$

Лемма 3. Столбец $[F]_q$ преобразуется в столбец $[F^*]_\xi$ по ковекторному правилу.

Действительно, в силу (16) с учетом (17)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)^*\right)\frac{\partial q^*_i}{\partial \xi_\alpha} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)^* \frac{d}{dt}\frac{\partial q^*_i}{\partial \xi_\alpha} =$$

$$= \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)^* + \underline{\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)^* \left(\sum_k \frac{\partial^2 q^*_i}{\partial \xi_k \partial \xi_\alpha}\dot{\xi}_k + \frac{\partial^2 q^*_i}{\partial t \partial \xi_\alpha}\right)}.$$