Далее

$$\frac{\partial F^*}{\partial \xi_\alpha} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)^* \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\right)^* \frac{\partial \dot q_i^*}{\partial \xi_\alpha} =$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)^* \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha} + \underline{\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\right)^* \left(\sum_k \frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_k} \dot\xi_k + \frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi \partial t}\right)}.$$

Подчеркнутые члены равны. После вычитания

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial F^*}{\partial \xi_\alpha} = \sum_i \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\right)^*. \qquad (11.24)$$

Если исключить случаи (22), (23), то ступенчатые производные всегда приводят к выражениям, явно зависящим от старших производных $\ddot q_i$. Приравнивая такие производные нулю, получим дифференциальные уравнения второго порядка, правда, не разрешенные (пока) относительно $\ddot q_i$.

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ЛАГРАНЖА

по определению имеют вид

$$[L]_{q_i} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad (11.25)$$

где $L(\dot q, q, t)$ — некоторая заданная функция, называемая функцией Лагранжа, или лагранжианом. Уравнения вида (25) впервые рассматривались Эйлером при решении вариационных задач. Позднее Лагранж придал форму (25) уравнениям движения обширного класса задач механики, в связи с чем уравнения (25) обычно называются просто уравнениями Лагранжа.

Цепочка примеров.

1. Уравнения движения материальной точки в потенциальном поле сил имеют лагранжев вид, причем L — разность кинетической и потенциальной энергий.

Доказательство. Уравнения движения имеют вид

$$m\ddot x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\ddot z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Положим $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, и введем лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot q_1^2 + \dot q_2^2 + \dot q_3^2) - V(q_1, q_2, q_3, t).$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}(m\dot q_i) - \left(-\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = m\ddot q_i + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0.$$

А это и требовалось.