2. Точно так же уравнениям Ньютона системы свободных материальных точек, движущихся под действием потенциальных сил:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, \ i = 1, \ldots, N, \tag{11.26}$$

можно придать форму уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial' \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial' \mathbf{r}_i} = 0, \tag{11.27}$$

где

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t). \tag{11.28}$$

3. Допустим, что имеем идеализированную систему с r связями $f_s(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0$ и потенциальными силами.

Система уравнений Лагранжа с множителями

$$\begin{cases} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} + \displaystyle\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}_i}, \ i = 1, \ldots, n, \\ f_s = 0, \ s = 1, \ldots, r, \end{cases} \tag{11.29}$$

является частным случаем системы (7.4) и одновременно имеет лагранжев вид: если мы положим

$$\mathcal{L} = L + \sum_{s=1}^{r} \lambda_s f_s \tag{11.30}$$

и станем рассматривать λ_s как переменные, равноправные r_i:

$$q = (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N, \lambda_1, \ldots, \lambda_s),$$

то будем иметь ($\mathcal{L}$ не зависит от $\dot{\lambda}_s$!)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} - \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial r_i} \equiv$$

$$\equiv m_i \ddot{r}_i + \frac{\partial V}{\partial r_i} - \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial r_i} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_s} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_s} = -f_s = 0,$$

что и требовалось.

Наша цепочка примеров превращается в ряд утверждений весьма общего характера. Прежде чем ее продолжить, укажем на

ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ:

1. *Если вместо лагранжиана L взять лагранжиан $\tilde{L} = cL + \dot{f}$, то уравнения $[\tilde{L}]_{q_i} = 0$ будут эквивалентными исходным.*

Доказательство: см. (23).