2. **Если имеется замена переменных** $q=q^*(\xi, t)$ (вот здесь уже $m=n$), **невырожденная в том смысле, что**

$$\det \frac{\partial q^*}{\partial \xi} \neq 0 \tag{11.31}$$

(иначе говоря, обратимая), **то уравнения**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} - \frac{\partial L^*}{\partial \xi_\alpha} = 0 \tag{11.32}$$

эквивалентны исходным.

Доказательство. Чтобы преобразовать (25) в силу замены, надо взять q^*, вычислить $\dot{q}^*$ и $\ddot{q}^*$ по формулам (13) и (14) и все подставить в (25). Коротко говоря, надо вычислить

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)^* = 0.$$

Последние уравнения в силу (24) отличаются от уравнений (32) умножением на невырожденную матрицу (31) и потому эквивалентны им.

Вернемся к идеализированным системам с потенциальными силами. В пространстве $\mathbb{R}^{3N}=\{\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N\}$ при каждом фиксированном t уравнения связей задают некоторую поверхность (подмногообразие) размерности $n=3N-r$:

МНОГООБРАЗИЕ ПОЛОЖЕНИЙ

$$\mathfrak{M} = \{f_1(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = \ldots = f_r(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0\}.$$

Число n **называется числом степеней свободы системы** (для понимания дальнейшего достаточно представить себе двумерную поверхность в трехмерном пространстве $N=1$, $r=1$, т. е. ограничиться движением точки по нешероховатой поверхности, о котором уже говорилось в теме 5). Локальные координаты на многообразии положений имеют специальное название — **определяющие координаты** (говорят также «лагранжевы», или «обобщенные координаты»). Смысл термина в том, что расположение системы точек m_i в пространстве однозначно определяется n величинами (фактически мы имеем частный случай (9)):

$$\mathbf{r}_\nu = \bar{\mathbf{r}}(q_1, ..., q_n, t), \tag{11.33}$$

где $\bar{\mathbf{r}}_\nu(q, t)$ — некоторые явные зависимости такие, что

$$\operatorname{rang} \frac{\partial(\bar{\mathbf{r}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{r}}_N)}{\partial(q_1, \ldots, q_n)} = n, \tag{11.34}$$

$$f_s(\bar{\mathbf{r}}_1(q, t), \ldots, \bar{\mathbf{r}}_N(q, t)) \equiv 0. \tag{11.35}$$

В силу формул (33) аналогично (13)

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_i \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_\nu}{\partial t}. \tag{11.36}$$