Перемещение системы $\{\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_\nu(t)\}$ можно задать в виде

$$q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t)), \tag{11.37}$$

имея в виду вычислять $\mathbf{r}_\nu(t)$ подстановкой (37) в (33).

Теорема.

Набор функций $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ задает движение системы тогда и только тогда, когда удовлетворяет уравнениям (Эйлера—)Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_i} = 0, \tag{11.38}$$

где $\bar{L} = \bar{T} - \bar{V}$, а подробнее

$$\bar{L}(\dot{q}, q, t) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{d\bar{\mathbf{r}}_\nu}{dt}\right)^2 - V(\bar{\mathbf{r}}_1(q, t), \ldots, \bar{\mathbf{r}}_N(q, t)) \tag{11.39}$$

есть результат подстановки (33), (36) в (28).

Доказательство. Пусть для краткости $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N\}$.

Лемма о трансверсальных координатах. Существует невырожденная замена

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(q_1, \ldots, q_n, \chi_1, \ldots, \chi_r, t), \tag{11.40}$$

такая, что

$$\mathbf{r}^*(q, 0, t) \equiv \bar{\mathbf{r}}(q, t), \tag{11.41}$$

$$f_s(r^*(q, \chi, t), t) \equiv \chi_s. \tag{11.42}$$

Будем искать эту замену в виде

$$\mathbf{r}^* = \bar{\mathbf{r}} + \sum_\sigma \rho_\sigma \mathbf{n}_\sigma, \tag{11.43}$$

где

$$\mathbf{n}_\sigma(q, t) = \left.\frac{\partial f_\sigma}{\partial' \mathbf{r}}\right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}(q,t)}. \tag{11.44}$$

Поскольку параметр t произвольно фиксируется, писать его больше не будем. Подставляя (43) в (42), получаем формально

$$\varphi_s(q, \rho) \equiv f_s(\bar{\mathbf{r}} + \Sigma \rho_\sigma \mathbf{n}_\sigma) = \chi_s.$$

Заметим, что

$$\left.\frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_\sigma}\right|_{\rho=0} = \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{n}_\sigma = (\mathbf{n}_s, \mathbf{n}_\sigma).$$

Справа получаем элементы определителя Грама линейно независимых векторов $\mathbf{n}_s$, который отличен от нуля. По теореме о неявной функции при каждом q величины ρ суть однозначные функции χ. В результате

$$\rho = \rho(q, \chi),$$

причем $\rho(q, 0) \equiv 0$. Лемма доказана.