В силу второй теоремы об эквивалентности уравнения (29)', порожденные лагранжианом (30), в переменных q, χ будут

$$[\mathcal{L}]_{q_i}=0,\ [\mathcal{L}]_{\chi_\sigma}=0,\ [\mathcal{L}]_{\lambda_s}=0,$$

причем $\mathcal{L}=L^*+\Sigma\lambda_s\chi_s$. Более подробно

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L^*}{\partial \dot q_i}-\dfrac{\partial L}{\partial q_i}=0,\ i=1,\ldots,n=3N-r,\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L^*}{\partial \dot\chi_\sigma}-\dfrac{\partial L^*}{\partial \chi_\sigma}=\lambda_\sigma,\ \sigma=1,\ldots,r,\\ \chi_s=0,\ s=1,\ldots,r; \end{cases}$$

последние уравнения позволяют нам подставить $\chi_s=\dot\chi_s=\ddot\chi_s=0$ в первые n уравнений (следующие r нужны только для вычисления λ_s). Результат подстановки обозначим $(\ )^0$. Согласно доказанному в начале параграфа, вместо того чтобы сначала продифференцировать по времени, а потом делать подстановку, можно поступить наоборот; совершить подстановку, а потом продифференцировать, т. е.

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_i}\right)^0=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_i}\right)^0.$$

Далее, по определению частной производной все равно, когда совершать подстановку — до или после дифференцирования, т. е.

$$\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_i}\right)^*=\frac{\partial (L^*)^0}{\partial \dot q_i},\quad \left(\frac{\partial L^*}{\partial q_i}\right)^0=\frac{\partial (L^*)^0}{\partial q_i}.$$

Наконец, $(L^*)^0=\bar L$. Итак, первые n уравнений приобрели искомый вид (38). Впредь, конечно, черту над L опустим.

ЯВНЫЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Сначала рассмотрим уравнения (25) в общем виде. Введем в рассмотрение набор функций

$$p_i(\dot q, q, t)=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}. \qquad (11.45)$$

Функция p_i называется каноническим или обобщенным импульсом, соответствующим координате q_i в системе переменных $(q_1,\ldots,$ $\ldots, q_n)$. Вычислим ступенчатые производные явно:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial' \dot q}-\frac{\partial L}{\partial' q}=\frac{'\partial p}{\partial \dot q}\ddot q+\frac{'\partial p}{\partial q}\dot q+\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial' q}=0.$$

Назовем лагранжиан регулярным, если

$$\det\frac{\partial p}{\partial \dot q}=\det\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}\neq 0 \qquad (11.46)$$

(последняя матрица симметрична). В этом случае уравнения Лагранжа можно разрешить относительно старших производных:

$$\ddot q=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial' q}-\ldots\right)=X(\dot q, q, t) \qquad (11.47)$$

(выражение для ... запоминать не обязательно).