Центральная лемма. Если L — регулярный лагранжиан, то

$$\frac{d^X}{dt}p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

(именно эта лемма позволяет не различать d/dt и d^X/dt в обозначениях). В самом деле,

$$\frac{d^X}{dt}p = \frac{'\partial p}{\partial \dot{q}}X + \ldots = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial' q} - \ldots\right) + \ldots = \frac{\partial L}{\partial' q}.$$

Впредь лагранжианы считаются регулярными. **Всегда регулярны лагранжианы механических систем.** В самом деле, от скоростей $\dot{q}_i$ зависит только

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{d\overline{\mathbf{r}}_\nu}{dt}\right)^2,$$

причем в силу (36) каждое слагаемое и вся сумма имеет вид квадратичного выражения по скоростям:

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q, t)\,\dot{q}_j\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} a_i(q, t)\,\dot{q}_i + a(q, t). \qquad (11.48)$$

Поскольку $T \geqslant 0$, $T = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{r}}_\nu = 0$, матрица

$$\|a_{ij}\| = \left\|\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right\| \qquad (11.49)$$

положительно определена и потому невырождена.

Если связи не зависят явно от времени, то и определяющие координаты $q_1, \ldots, q_n$ можно ввести независящим от времени образом: $\mathbf{r}_\nu = \overline{\mathbf{r}}_\nu(q)$; при $\overline{V} = \overline{V}(q)$ получается

классическая натуральная система

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q). \qquad (11.50)$$

Тогда уравнения движения в форме Лагранжа суть

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k a_{ik}\dot{q}_k\right) - \frac{1}{2}\sum_{k,l}\frac{\partial a_{kl}}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_l + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0,$$

или

$$\sum_k a_{ik}\ddot{q}_k + \sum_{j,k}\gamma^i_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0. \qquad (11.51)$$

В середине стоят выражения, строго квадратичные по $\dot{q}_k$. Разрешая относительно старших производных, имеем

$$\ddot{q}_i + \sum_{k,l}\Gamma^i_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_k a^{ik}\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0,$$