где Γ^i_{kl} — некоторые функции переменных q. Их вид сейчас роли не играет, но их нетрудно вычислить:

$$\Gamma^i_{kl} = \sum_s a^{is}\left(-\frac{\partial a_{kl}}{\partial q_s} + \frac{\partial a_{ls}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_l}\right).$$

Это в точности символы Кристоффеля для римановой метрики: $dS^2 = \Sigma a_{kl} dq_k dq_l$. Что касается коэффициентов a^{is} (индексы сверху), то они образуют матрицу, обратную к $\|a_{kl}\| = A$. Итак, в векторном виде уравнения движения суть

$$\ddot{q} + \Gamma(\dot{q}, q) + A^{-1}\frac{\partial V}{\partial' q} = 0, \tag{11.52}$$

где $\Gamma(\dot{q}, q)$ строго квадратично зависит от $\dot{q}$. В частности, в случае одной степени свободы ($n=1$) имеем

$$L = \frac{1}{2} a(q)\dot{q}^2 - V(q), \tag{11.53}$$

$$\frac{d}{dt}(a(q)\dot{q}) - \frac{1}{2} a'(q)\dot{q}^2 + V'(q) = 0,$$

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} a'(q)\dot{q}^2 + V'(q) = 0. \tag{11.54}$$

Реже встречаются **обобщенно-натуральные системы**:

$$L = \frac{1}{2}\Sigma a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \Sigma f_i\dot{q}_i - V,$$

где a_{ij}, f_i, V зависят от q и совсем редко от времени. Уравнения пишутся аналогично (если t отсутствует, то достаточно в (51) дописать (22)). Забегая вперед, заметим, что появление линейных членов в лагранжиане может иметь причиной не только нестационарность связей (см. тему 14).

ОСНОВНЫЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА — ЛАГРАНЖА

1. Если $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$ (тогда система (25) автономна), то имеется **интеграл типа энергии**:

$$H(\dot{q}, q) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L = h = \mathrm{const}$$

(или интеграл Якоби, интеграл Пенлеве). В самом деле,

$$\frac{d^X}{dt} H = \underline{\underline{\sum_i\left(\frac{d^X}{dt} p_i\right)\dot{q}_i}} + \underline{\sum_i p_i X_i} - \underline{\underline{\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i}} - \underline{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} X_i}.$$

Члены, подчеркнутые один раз, уничтожаются в силу (45), подчеркнутые дважды — в силу центральной леммы.