Нас интересуют те движения, которые происходят вблизи состояния равновесия. Необходимый этап исследования близких к равновесию движений — это рассмотрение уравнений первого приближения. Вообще если есть система n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n),$$

то $x=0$ есть состояние равновесия тогда и только тогда, когда $f(0)=0$. Разложим $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$f(x) = Cx + O(|x|^2), \quad C = \frac{\partial f}{\partial x}(0),$$

и отбросим члены порядка выше первого. Получим линейную систему

$$\dot{x} = Cx,$$

которая и называется первым приближением для системы $\dot{x} = f(x)$ в окрестности состояния равновесия $x=0$. Напомним, что свойства решений существенно зависят от распределения корней характеристического уравнения

$$\det(C - \lambda E) = 0.$$

Если все корни χ_i (вообще говоря, комплексные числа) различны и отличны от нуля, то общее решение первого приближения есть линейная комбинация частных решений вида:

$$e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} \xi_1^{(i)} \\ \vdots \\ \xi_n^{(i)} \end{pmatrix}, \quad C\xi^{(i)} = \lambda_i \xi^{(i)}.$$

Перейдем к уравнениям Лагранжа.

Теорема. Пусть $q_* = 0$, $\dot{q} = 0$ — состояние равновесия классической натуральной системы. Тогда уравнения первого приближения порождаются лагранжианом

$$L_0 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}q_iq_j, \tag{12.2}$$

коэффициенты которого образуют матрицы

$$A = \|a_{ij}\| = \|a_{ij}(0)\|, \; B = \|b_{ij}\| = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(0) \right\|. \tag{12.3}$$

Доказательство. Согласно (11.52), уравнения Лагранжа эквивалентны уравнениям первого порядка вида:

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q},$$

$$\frac{d\dot{q}}{dt} = -A^{-1}(q)\frac{\partial V}{\partial q} - \Gamma(\dot{q}, q).$$