Нам надо линеаризовать их в окрестности состояния покоя $q=0$, $\dot{q}=0$. Верхние уравнения уже и так линейны, а нижние надо разложить в ряд Тейлора (сразу заметим, что слагаемые $\Gamma(\dot{q}, q) = O(\dot{q}^2)$):

$$\frac{d\dot{q}}{dt} = -(A^{-1}(0) + O(q))(Bq + O(q^2)) + O(\dot{q}^2) = A^{-1}Bq + O(q^2 + \dot{q}^2).$$

Отсюда уравнения первого приближения суть

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \frac{d\dot{q}}{dt} = -A^{-1}Bq.$$

Возвращаясь к уравнениям второго порядка, имеем

$$A\ddot{q} + Bq = 0, \tag{12.4}$$

что и требовалось. Отметим дополнительно, что $L_0$ получается из лагранжиана $L$ разложением его в ряд Тейлора по $\dot{q}$, $q$ и отбрасыванием членов порядка выше второго.

Чтобы описать движения в первом приближении, нам потребуется вторая теорема об эквивалентности и

*факт из линейной алгебры*:

если имеются две квадратичные формы

$$\varphi = \sum a_{ij}x_i x_j, \quad \psi = \sum b_{ij}x_i x_j,$$

причем первая из них положительно определена, то существует невырожденная замена переменных

$$x = S\xi \quad \left(x_i = \sum_\alpha S_{i\alpha}\xi_\alpha\right),$$

такая, что после подстановки

$$\varphi = \sum \xi_\alpha^2, \quad \psi = \sum \Lambda_\alpha \xi_\alpha^2.$$

При этом $\Lambda_i$ — корни уравнения $\det(\Lambda A - B) = 0$.

Применим это преобразование к лагранжиану $L_0$ и положим $q = S\xi$, тогда $\dot{q} = S\dot{\xi}$, так что

$$L^* = \frac{1}{2}\sum \dot{\xi}_\alpha^2 - \frac{1}{2}\sum \Lambda_\alpha \xi_\alpha^2, \tag{12.5}$$

а система уравнений первого приближения приняла вид

$$\begin{gathered} \ddot{\xi}_1 + \Lambda_1\xi_1 = 0, \\ \cdots\cdots \\ \ddot{\xi}_n + \Lambda_n\xi_n = 0. \end{gathered} \tag{12.6}$$

Ее частные решения имеют вид

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots \xi_{k-1} = \xi_{k+1} = \ldots = \xi_n \equiv 0,$$

$$\xi_k = \begin{cases} e^{\sqrt{\Lambda_k}t} \text{ или } e^{-\sqrt{\Lambda_k}t}, & \Lambda_k > 0, \\ 1 \text{ или } t, & \Lambda_k = 0, \\ \cos\sqrt{-\Lambda_k}\,t \text{ или } \sin\sqrt{-\Lambda_k}\,t, & \Lambda_k < 0. \end{cases} \tag{12.7}$$