Свойства линеаризованной системы полностью определяются характером частных решений. Например, устойчивость ее (т. е. ограниченность всех решений) гарантируется условием $\Lambda_k<0$, когда все собственные числа $\pm i\sqrt{-\Lambda_k}$ получаются чисто мнимыми (тогда V имеет минимум в точке 0). В переменных q в этом случае возможны **нормальные колебания**:

$$q^{(k)}(t)=(c_k'\cos\omega_k t+c_k''\sin\omega_k t)\rho^{(k)}\,,\quad \omega_k=\sqrt{-\Lambda_k}\,, \tag{12.8}$$

где $\rho^{(k)}$ собственный вектор матрицы $-\omega_k^2A+B$:

$$(-\omega_k^2A+B)\rho^{(k)}=0. \tag{12.9}$$

Переменные ξ_k называются нормальными координатами.

Из теорем о первом приближении вытекает, что при $\Lambda_k\neq0$ уравнения (4) в ряде вопросов дают неплохое представление о поведении решений точной системы. Особенно важна роль этого приема на практике, где ценность всякого приближения усиливается тем, что фактически важно поведение решений лишь на каком-то конечном интервале времени.

Линеаризация в случае (автономных) обобщенно-натуральных систем сложнее. К уравнениям (11.51) добавляются члены

$$\sum_{ik}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k}-\frac{\partial f_k}{\partial q_i}\right)\dot q_i.$$

Состояние равновесия по-прежнему имеем при условии $\frac{\partial V}{\partial q}=0$, а уравнения первого приближения получают вид

$$A\ddot q+C\dot q+Bq=0,$$

где

$$C=\left\|\frac{\partial f_i}{\partial q_k}-\frac{\partial f_k}{\partial q_i}\right\|\Bigg|_{q=0}.$$

Хотя достаточные условия устойчивости можно принять те же самые: корни характеристического уравнения

$$\det(A\lambda^2+C\lambda+B)=0,$$

должны быть ненулевыми и числа мнимыми:

$$\lambda=\pm i\omega,\quad \omega=\omega_1,\ \dots,\ \omega_n,$$

соответствующие семейства частных решений будут

$$q(t)=(c'\cos\omega t+c''\sin\omega t)\rho+(-c'\sin\omega t+c''\cos\omega t)\sigma,$$

где векторы σ и ρ удовлетворяют системе

$$(-A\omega^2+B)\rho-C\omega\sigma=0,\quad C\omega\rho+(-A\omega^2+B)\sigma=0$$

(для доказательства искать частные решения в виде $e^{\lambda t}(\rho+i\sigma)$ и учесть, что $\lambda=\pm i\omega$).

Таким образом, в общем случае будем иметь не колебания (8) вдоль вектора ρ, а движение по замкнутым кривым в плоскости