векторов ρ и σ, как у особой точки типа «центр». Подчеркнем: речь идет только о некоторых частных решениях; в той же плоскости векторов ρ и σ вполне возможны совсем другие решения (положим, например, $n=2$!). В пространстве переменных q получается до n таких плоскостей, которые, конечно, будут пересекаться (у эквивалентной системы первого порядка в пространстве q, $\dot{q}$ имеются инвариантные плоскости, которые, конечно, не пересекаются; пересечения возникают после проектирования их в пространство q).

Тема 13

ПРИНЦИП ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим систему с лагранжианом $L(\dot{q}, q, t)$. В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}(q, t)$ зафиксируем произвольно две точки:

$$A=(a_1, \ldots, a_n, t_A), \quad B=(b_1, \ldots, b_n, t_B), \quad t_A<t_B.$$

Будем говорить, что кривая $q(t)$ соединяет их, если

$$q(t_A)=a, \quad q(t_B)=b.$$

Действием вдоль такой кривой называется величина

$$W[q(t)] = \int_{t_A}^{t_B} L(\dot{q}(t), q(t), t)\,dt. \tag{13.1}$$

Квадратные скобки призваны подчеркнуть, что имеем функционал — **функционал действия**, а не сложную функцию t.

Вариацией кривой $q(t)$, соединяющей точки A, B, называется гладкое семейство кривых $q(\alpha, t)$, где $\alpha\in(-\varepsilon, \varepsilon)$, $t\in[t_A, t_B]$, такое, что $q(0, t)\equiv q(t)$ (рис. 58, *а*). Нам будет удобно писать $\frac{d}{dt}q(\alpha,t)$ вместо $\frac{\partial}{\partial t}q(\alpha,t)$ (поскольку это — скорость) и $\frac{\delta}{\delta\alpha}q(\alpha,t)$ вместо $\frac{\partial}{\partial\alpha}q(\alpha,t)$ (для контраста и по традиции).

Пусть вариация произвольно зафиксирована. Тогда имеем гладкую функцию

$$w(\alpha) = W[q(\alpha,t)] = \int_{t_A}^{t_B} l(\alpha,t)\,dt = \int_{t_A}^{t_B} L\left(\frac{dq(\alpha)}{dt}, q(\alpha,t)\, t\right)dt. \tag{13.2}$$

Вариацией действия при заданной вариации кривой $q(t)$ называется число $\left.\frac{\delta w}{\delta\alpha}\right|_{\alpha=0}$ $\left(\text{всюду далее } \frac{\delta}{\delta\alpha} = \left.\frac{\delta}{\delta\alpha}\right|_{\alpha=0}\right)$:

$$\frac{\delta w}{\delta\alpha} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\delta l}{\delta\alpha}\,dt = \int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\frac{\delta}{\delta\alpha}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\frac{\delta q}{\delta\alpha}\right)dt =$$