$$= \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q} \cdot \frac{\delta q}{\delta \alpha} \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right) \cdot \frac{\delta q}{\delta \alpha} + \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\delta q}{\delta \alpha} \right] dt =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right) \cdot \frac{\delta q}{\delta \alpha} dt + \frac{\partial L}{\partial \dot q} \cdot \frac{\delta q}{\delta \alpha} \Big|_{t_A}^{t_B} .$$

Итоговая формула для вариации действия

$$\frac{\delta w}{\delta \alpha} = \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right)_{q(t)} \cdot \delta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q} \cdot \delta(t) \Big|_{t_A}^{t_B}, \qquad (13.3)$$

где

$$\delta(t) = \frac{'\delta q(\alpha, t)}{\delta \alpha}. \qquad (13.4)$$

Для любой вектор-функции $\delta(t)$ существует вариация такая, что выполнено (4). В самом деле, достаточно положить

$$q(\alpha, t) = q(t) + \alpha\delta(t).$$

Говорят про вариацию с закрепленными концами (рис. 58, *б*), если

$$q(\alpha, t_A) \equiv a, \quad q(\alpha, t_B) \equiv b. \qquad (13.5)$$

В этом случае $\delta(t_A) = \delta(t_B) = 0$.

Теорема.

Функция $q(t)$, **соединяющая точки** A, $B \in \mathbb{R}^{n+1}$, **является решением уравнения Эйлера—Лагранжа с функцией** $L(\dot q, q, t)$ **тогда и только тогда, когда она является экстремалью функционала действия** на пространстве кривых, соединяющих точки A и B, т. е. для любой ее вариации с закрепленными концами соответствующая вариация функционала равна нулю.

Доказательство. Приравняем вариацию (3) к нулю, не забыв про (5). Условие экстремальности

$$\int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right) \cdot \delta(t) = 0, \qquad (13.6)$$

для каждой функции $\delta(t)$, равной нулю при $t = t_A$, t_B. Положим

$$\Lambda(t) = \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right)_{q(t)} .$$

Если $\Lambda(t) \equiv 0$, то (6) выполнено. Если $\Lambda(t) \not\equiv 0$, то пусть

$$\delta(t) = (t - t_A)(t_B - t)\Lambda(t).$$