Тогда интеграл (6) принимает вид

$$\int_{t_A}^{t_B} (t - t_A)(t_B - t)\Lambda^2(t)\,dt > 0,$$

т. е. (6) не выполнено.

СНОВА ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

В теме 11 были доказаны следующие утверждения.

1. Если вместо лагранжиана L взять лагранжиан $\tilde{L} = cL + df(q, t)/dt$, то полученные уравнения эквивалентны исходным.

2. Пусть имеется замена переменных

$$q = q^*(\xi, t), \quad \dot{q}^* = \frac{\partial q^*}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial q^*}{\partial t},$$

и новый лагранжиан $L^*(\dot{\xi}, \xi, t) = L(\dot{q}^*(\xi, \xi, t), q^*(\xi, t), t)$. Тогда соответствующие уравнения Лагранжа эквивалентны исходным.

Второе доказательство 1: $\tilde{W}[q(t)] = cW[q(t)] + f(B) - f(A)$, так что экстремали у обоих функционалов одни и те же.

Второе доказательство 2: Рассмотрим соответствие $\xi(t) \leftrightarrow q(t) = q^*(\xi(t), t)$; тогда $W^*[\xi(t)] = W[q(t)]$, так что и экстремали переходят в экстремали.

ВАРЬИРОВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗЕЙ

Пусть наряду с лагранжианом $L(\dot{q}, q, t)$ заданы связи

$$f_k(q, t) = 0, \quad k = 1, \ldots, r, \tag{13.7}$$

причем $f(A) = f(B)$. Все кривые, соединяющие A и B, должны удовлетворять условию

$$f_k(q(t), t) = 0. \tag{13.8}$$

Это же условие войдет и в определение вариации: $f_k(q(\alpha, t), t) \equiv 0$. Если концы закреплены, то соответствующая вариация функционала действия W имеет вид

$$\frac{\delta w}{\delta \alpha} = \int_{t_A}^{t_B} \left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q}\right) \cdot \delta(t)\,dt, \tag{13.9}$$

причем для $k = 1, .., r$

$$\frac{\partial f_k}{\partial' q} \cdot \delta(t) \equiv 0. \tag{13.10}$$

Если $\delta(t)$ удовлетворяет условиям (10), то существует вариация, удовлетворяющая связям, такая, что справедливо (4). Это следует из леммы о трансверсальных координатах ((11.40)—(11.41)).

Теорема. Кривая $q(t)$, удовлетворяющая условию (8), является экстремалью функционала действия с закрепленными концами при наличии связей (1) тогда и только тогда, когда существуют