функции $\lambda_k(t)$ (зависящие от $q(t)$) такие, что $q(t)$ есть экстремаль функционала

$$W = \int_{t_A}^{t_B} \mathscr{L}\, dt = \int_{t_A}^{t_B} (L - \sum_k \lambda_k(t) f_k)\, dt,$$

рассматриваемого уже без связей. Эквивалентное условие: $q(t)$ есть решение уравнений Лагранжа, порожденных функцией $\mathscr{L}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i},$$

т. е. таких же, какие мы раньше писали для движений со связями. Таким образом, функции $\lambda_k(t)$ можно рассматривать как неопределенные множители Лагранжа для отыскания экстремалей при наличии связей (сравнить с методом Лагранжа отыскания условного экстремума функции).

Доказательство. Введем вектор-функции

$$n_k(t) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial' q}\right)\Bigg|_{q(t)}. \qquad (13.11)$$

Существуют функции $\lambda_k(t)$ такие, что

$$\Lambda(t) - \sum_k \lambda_k(t)\, n_k(t) \qquad (13.12)$$

удовлетворяет условиям (10). В самом деле, формальные скалярные произведения (12) с (11) должны иметь вид

$$\Lambda \cdot n_l = \sum_k \lambda_k n_k \cdot n_l. \qquad (13.13)$$

Матрица $\|n_k \cdot n_l\|$ невырождена, так как n_k линейно независимы, и потому λ_k можно выразить из (13). Тогда для вариации

$$\delta(t) = (t - t_A)(t_B - t)(\Lambda(t) - \Sigma\lambda_k(t) n_k(t)) \qquad (13.14)$$

имеем (подчеркнутое слагаемое равно нулю)

$$\frac{\delta W}{\delta \alpha} = \int_{t_A}^{t_B} \Lambda(t)\cdot\delta(t)\, dt - \underline{\int_{t_A}^{t_B} \Sigma\, \lambda_k(t)\, n_k(t)\cdot\delta(t)\, dt} =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} (t - t_A)(t_B - t)(\Lambda(t) - \Sigma\,\lambda_k(t)\, n_k(t))^2\, dt.$$

Вариации обоих функционалов совпадают при условии (10) и положительны для (14), если $(12) \neq 0$. Остальное просто.

СИММЕТРИЯ

Говорят, что система с лагранжианом L допускает симметрию,