если имеется зависящая от параметра s замена переменных $q = q^*(s, \xi, t)$ такая, что

1) параметр s существен в том смысле, что формулы замены явно от него зависят: $\partial q^*/\partial s \neq 0$;

2) преобразованный лагранжиан не зависит от s:

$$L_s^*(\dot{\xi}, \xi, t) \equiv L_0^*(\dot{\xi}, \xi, t).$$

Теорема Ли—Нетер. **Если система** с лагранжианом L **допускает симметрию, то имеется первый интеграл**

$$J = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial s}. \tag{13.15}$$

Пример 1. Пусть $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$, а замена переменных есть поворот осей:

$$x = \xi \cos s - \eta \sin s, \quad y = \xi \sin s + \eta \cos s.$$

тогда $L_s^* \equiv \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{k}{2}(\xi^2 + \eta^2)$, а первый интеграл

$$J = m\dot{x}(-\xi \sin s - \eta \cos s) + m\dot{y}(\xi \cos s - \eta \sin s) = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

совпадает с интегралом площадей. Можно было бы выразить $\dot{x}$, $\dot{y}$ через $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$. Тогда $J = m(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi})$.

Пример 2. Если имеется игнорируемая (циклическая) переменная q_n, то положим $q_i = \xi_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $q_n = \xi_n + s$. Соответствующий интеграл

$$J = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{dq_n}{ds} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$$

совпадает с кинестеническим (циклическим). (Кстати, справедливо и обратное утверждение: интеграл (15) можно представить как кинестенический в некоторой системе координат.)

Доказательство теоремы. Пусть $\xi(t)$ — решение уравнений Лагранжа с лагранжианом L_0^*. Тогда при каждом s функция $q(s, t) = q^*(s, \xi(t), t)$ будет решением уравнений Лагранжа с функцией $L(\dot{q}, q, t)$, и при этом действие $w(s) = W[q(s, t)] = W^*[\xi(t)]$ не зависит от s. Дифференцируя W по s, имеем по формуле (3)

$$\frac{\delta w}{\delta s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\delta q}{\delta s}\bigg|_{t_A}^{t_B} = 0, \quad \frac{\delta q}{\delta s} = \frac{\partial q}{\partial s},$$

так что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial q}{\partial s}\bigg|_{t_B} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial q}{\partial s}\bigg|_{t_A},$$

а это означает, что J — первый интеграл.