Общая концепция, связывающая наличие интеграла с определенными свойствами симметрии системы, принадлежит С. Ли (мы дадим представление о ней в теме 17), а конкретный вид интеграла для систем, описываемых уравнениями типа Эйлера—Лагранжа и обладающих известной симметрией, получен Э. Нетер.

Обычно от преобразований $q=q^*(\xi, s, t)$ требуют (иногда по традиции, иногда с дальним прицелом) выполнения групповых свойств:

а) при $s=0$ получается $q=\xi$;

б) хотя бы локально $q^*(s_2, q^*(s_1, \xi))=q^*(s_1+s_2, \xi)$. В этом случае интеграл J не зависит от s, и дифференцировать по s достаточно только при $s=0$. Привлекательные черты такого положения вещей очевидны, но сам факт существования интеграла справедлив без предположения о групповом свойстве. Можно представить себе замены, при разных $s=s_1$, s_2 дающие независимые интегралы J_1, J_2.

Ясно, что теорема Ли—Нетер верна и при наличии связей: дополнительно надо потребовать, чтобы f_k^* не зависели от s. Таким образом, наличие симметрии можно устанавливать, не вводя определяющих координат.

Тема 14

ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ И ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Наша цель — приблизить к формализму Лагранжа механические модели с непотенциальными силами. Введем в рассмотрение

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i, \quad i=1, \ldots, n. \tag{14.1}$$

Пока что от $T(\dot{q}, q, t)$ требуется лишь, чтобы

$$\det \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2} \neq 0.$$

Функции $Q_i(\dot{q}, q, t)$ называются обобщенными силами. Смысл термина скоро станет яснее, а пока что проведем формальный анализ. Если имеется замена переменных

$$q=q^*(\xi, t), \quad \dot{q}=\frac{'\partial q}{\partial \xi}\dot{\xi}+\frac{'\partial q}{\partial t},$$

то преобразованным в силу нее уравнениям (1) можно снова придать вид универсальных уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha}-\frac{'\partial T^*}{\partial \xi_\alpha}=\Xi_\alpha(\dot{\xi}, \xi, t), \quad \alpha=1, \ldots, n. \tag{14.2}$$

Докажем это. Левые части уравнений (1) преобразуются по ко-