

векторному правилу (это мы уже знаем):

$$[T^*]_{\xi_\alpha} = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\alpha} [T]_{q_i}.$$

Чтобы этому последовали также правые части, введем в рассмотрение (в принципе зависящую от времени  $t$ ) дифференциальную форму на пространстве  $\dot{q}$ ,  $q$  вида

$$\beta = \sum_i Q_i(\dot{q}, q, t) \delta q_i. \quad (14.3)$$

Здесь написано  $\delta q_i$  вместо обычных  $dq_i$  потому, что  $\dot{q}_i = dq_i/dt$ , так что символ  $dq_i$  уже занят. Кроме того, сейчас мы считаем  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  независимыми переменными, и потому дифференциалы  $\delta q_i$  и  $\delta \dot{q}_i$  также независимы (как  $\delta x$  и  $\delta y$  на плоскости). Последние, т. е.  $\delta \dot{q}_i$ , в выражении  $\beta$  не участвуют, так что мы имеем форму отнюдь не самого общего вида. Формы такого вида называются базовыми. Отметим также, что время  $t$ , фигурирующее в выражении  $\beta$ , рассматривается как параметр, который хотя произвольно, но фиксируется. Если есть замена переменных, то

$$\delta q_i = \sum_\alpha \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\alpha} \delta \xi_\alpha \quad (14.4)$$

(по  $t$  дифференцирования нет, так как время, повторяем, произвольно фиксируется). Выражение вида (4) называют изохронным дифференциалом функции  $q_i^*(\xi, t)$ .

*Лемма. Коэффициенты базовой формы при подстановке изохронных дифференциалов формул замены переменных преобразуются по векторному правилу.*

Это утверждение тривиально по форме:

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_i Q_i \delta q_i = \sum_{i, \alpha} Q_i \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\alpha} \delta \xi_\alpha = \sum_\alpha \Xi_\alpha \delta \xi_\alpha \rightarrow \\ &\rightarrow \Xi_\alpha = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\alpha} Q_i, \end{aligned} \quad (14.5)$$

однако важно по сути. Чтобы получить правые части преобразованных уравнений (получать левые из преобразованной функции  $T$  мы уже умеем), надо составить базовую форму  $\beta$ , подставить в нее формулы замены и их изохронные дифференциалы и собрать коэффициенты при  $\delta \xi_\alpha$ . Они и будут искомыми функциями  $\Xi_\alpha$ . Такое правило легче запомнить, нежели (5).

Итак, уравнения (2) получены, причем даже указан способ вычисления правых частей.

Примером универсальных уравнений Лагранжа являются и уравнения Ньютона для системы свободных точек:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{F}_i, \quad T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2.$$